

حساب دیفرانسیل و انتگرال

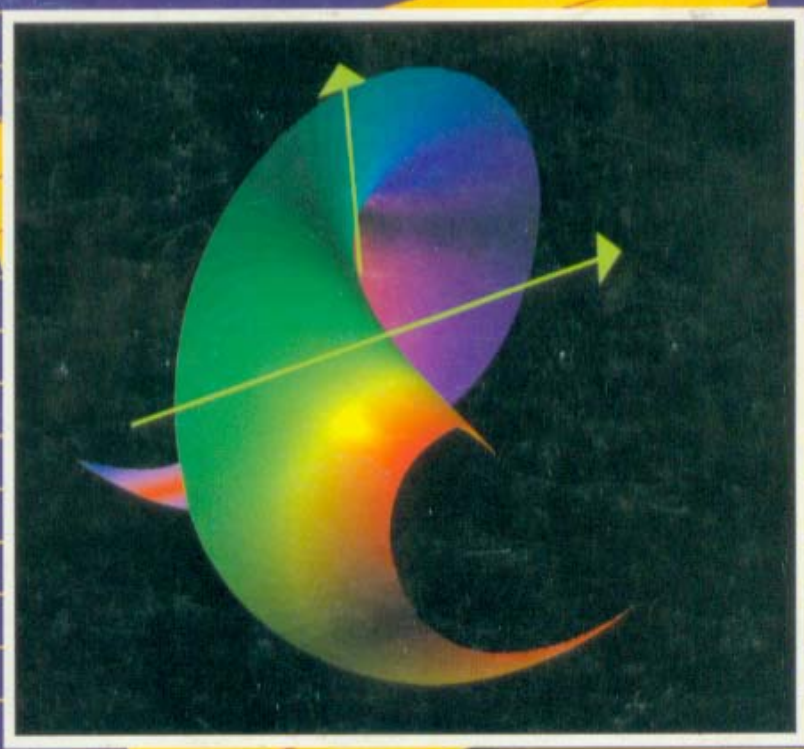
با هندسه تحلیلی

۳

«کتاب عام»

نوشته ریچارد ا. سیلورمن

ترجمه دکتر علی اکبر عالم زاده



جاد سوم

www.riazisara.ir



مشتقگیری جزئی^{۱۳}

بخش اعظمی از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی در رابطه با کمیات اسکالر یا برداری است که توابعی از یک متغیرند. و لذا، به محض دانستن فقط یک عدد، یعنی مقدار متغیر مستقل، کاملاً مشخص خواهند شد. لیکن بسیاری از کمیات جالب در ریاضیات و کاربردهایش توابعی از دو یا چند متغیر، یعنی مقادیر این متغیرها، می‌باشند. در زندگی واقعی متغیرهای زیادی وجود دارند. مثلاً، سود سالانه یک سوپرمارکت به نیروی کار و هزینه نگهداری، اجاره و هزینه حمل کالا، و فروش کالاهای مختلف بستگی دارد.

توصیف توابع چند متغیره، دست کم در اصول، نسبتاً آسان است. مشکل واقعی ساختن تعمیمهای چندگانه مناسبی از مشتق و انتگرال است. در این فصل نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان ایده‌های حساب دیفرانسیل را آنقدر پیش برد تا از عهده توابع چند متغیره برآیند. در فصلهای ۱۴ و ۱۵، تعمیم مفاهیم حساب انتگرال به توابع دو و سه متغیره سامان خواهد یافت.

۱۰.۱۳ توابع چندمتغیره

تعریف تابع دو یا سه متغیره. فرض کنیم D مجموعه نقاط (x, y) در صفحه باشد. منظور از تابع f از دو متغیر x و y یعنی قاعده یا روندی که به هر نقطه (x, y) در D عدد حقیقی منحصر به فردی را، که با $f(x, y)$ نموده می‌شود، منتسب می‌سازد. مجموعه D قلمرو f ، عدد $f(x, y)$ مقدار f در (x, y) ، و مختصات x و y نقطه (x, y) متغیرهای مستقل (یا شناسه‌های f) نام دارند. تابع f از سه متغیر x ، y ، و z به همین نحو تعریف می‌شود جز آنکه D یک مجموعه نقاط (x, y, z) در فضاست و مقدار f در (x, y, z) با $f(x, y, z)$ نموده می‌شود. منظور از "تابع $f(x, y)$ " البته یعنی تابع f که مقدارش در (x, y) مساوی $f(x, y)$ است، و این نوع زبان اختصاری معمول می‌باشد. مجموعه تمام مقادیری که f در نقاط D می‌گیرد برد f نام دارد، و آن را می‌توان مجموعه تمام مقادیر یک متغیر وابسته گرفت. مثلاً، برد $f(x, y, z)$ مجموعه تمام مقادیر متغیر وابسته $u = f(x, y, z)$ است وقتی (x, y, z)

روی مجموعه D تغییر کند. طبعاً، در انتخاب علایمی برای نمایش خود تابع و متغیرهای مستقل و وابسته آزادی زیادی داریم. همه اینها تعمیم ایده‌های نظیر برای توابع یک متغیره می‌باشند.

توابع چند متغیره در هر وضعی که مقادیر دو یا چند متغیر مستقل مقدار متغیر دیگر، یعنی متغیر وابسته، را به طور منحصر به فرد معین کنند ظاهر می‌شوند.

مثال ۱. فرض کنیم A مساحت مستطیلی به طول l و عرض w باشد. در این صورت، A تابعی از l و w است، و اگر این تابع را با f نشان دهیم، طبق فرمول معروفی از هندسه مقدماتی،

$$(1) \quad A = f(l, w) = lw.$$

در اینجا l و w متغیرهایی مستقل اند که می‌توانند مقادیر مثبت دلخواه بگیرند، و A متغیر وابسته می‌باشد. اما به آسانی می‌توان A را یکی از متغیرهای مستقل و l یا w را متغیر وابسته ساخت. در واقع، با حل (۱) نسبت به l داریم

$$l = g(A, w) = \frac{A}{w},$$

که l را به صورت تابعی دیگر (که در اینجا با g نموده می‌شود) از دو متغیر A و w بیان می‌کند. به همین نحو، فرمول

$$w = g(A, l) = \frac{A}{l}$$

w را به صورت تابعی از متغیرهای A و l بیان می‌کند. چرا مجدداً "از g برای نمایش تابع این فرمول استفاده کرده‌ایم؟

مثال ۲. فرض کنیم

$$(2) \quad f(x, y, z) = \frac{x - y}{y - z}.$$

در این صورت،

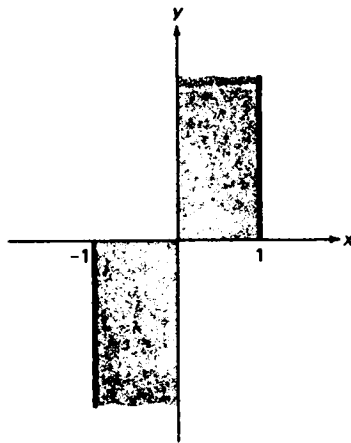
$$f(1, 4, 0) = \frac{1 - 4}{4 - 0} = -\frac{3}{4}$$

$$f(2, 3, 4) = \frac{2 - 3}{3 - 4} = 1,$$

ولی $f(3, 1, 1)$ وجود ندارد، زیرا محاسبه این کمیت منجر به مخرج صفر می شود. هر وقت تابعی با یک فرمول صریح مانند (۲)، بدون اطلاعاتی در باب مقادیر متغیرهای مستقل، داده شده باشد، فرض است که قلمرو تابع وسیعترین مجموعه نقاطی است که به ازای آنها فرمول معنی دارد. این مجموعه قلمرو طبیعی تابع نامیده می شود. لذا، قلمرو طبیعی تابع (۲) مجموعه تمام نقاط (x, y, z) در فضا است جز آنهایی که در صفحه $y - z = 0$ موازی محور x قرار دارند. به عنوان تمرین، نشان دهید که برد (۲) تمام خط حقیقی است.

مثال ۳. قلمرو طبیعی تابع

(۳) $f(x, y) = \arcsin x + \sqrt{xy}$
 بزرگترین مجموعه از نقاط (x, y) در صفحه است که تابع به ازای آنها تعریف شده است. چون $\arcsin x$ تعریف شده است اگر و فقط اگر $-1 \leq x \leq 1$ ، ولی \sqrt{xy} تعریف شده است اگر و فقط اگر $xy \geq 0$ ، قلمرو طبیعی (۳) جفت نوار سایه دار "نیمه نامتناهی" شکل ۱ می باشد.



شکل ۱

نوارها بسته اند به این معنی که شامل مرزهای خود می باشند.

اعمال جبری بر توابع چند متغیره همانند توابع یک متغیره تعریف می شوند. لذا،

$$(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y),$$

$$(fg)(x, y, z) = f(x, y, z)g(x, y, z),$$

و غیره، ترکیب توابع چند متغیره در مثالهای زیر شرح داده شده است.

مثال ۴. فرض کنیم

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad g(t) = t^2, \quad h(t) = \sqrt{t}.$$

در این صورت،

$$f(g(t), h(t)) = \frac{1}{g^2(t) + h^2(t)} = \frac{1}{t^4 + t}$$

تابعی است از متغیر t ، و باید شرط کنیم که $t > 0$ (چرا؟).

مثال ۵. فرض کنیم

$$f(u, v) = \frac{uv}{u + v}, \quad g(x, y) = x + y, \quad h(x, y) = x - y.$$

در این صورت،

$$f(g(x, y), h(x, y)) = \frac{g(x, y)h(x, y)}{g(x, y) + h(x, y)} = \frac{x^2 - y^2}{2x}$$

تابعی از دو متغیر x و y می باشد.

تبصره. به یاد می آورید که علاوه بر توابع عددی از یک متغیر، که مقادیرشان اعداد حقیقی اند، توابع برداری از یک متغیر (که توابع برداری از یک شناسه اسکالر نیز نام دارند) را نیز در نظر گرفته ایم. همچنین، می توان توابع برداری از چند متغیر، یا معادلاً "توابع برداری از یک نقطه متغیر در صفحه یا فضا، نیز در نظر گرفت. این توابع را میدانهای برداری نامیده و در فصل ۱۵ مطرح خواهیم کرد.

فضای n بعدی و توابع n متغیره. می توان گامی فراتر رفت و توابع (عددی) با بیش از سه متغیر را بر مجموعه ای از نقاط در فضا با بعد بیشتر از سه تعریف نمود. با آنکه تجسمش مشکل است، فضای n بعدی یا R^n چیزی جز مجموعه تمام "نقاط" (x_1, x_2, \dots, x_n) که در آن اعداد حقیقی x_1, x_2, \dots, x_n مختصات (x_1, x_2, \dots, x_n) اند نیست. نماد (x_1, x_2, \dots, x_n) که گاهی یک " n تایی مرتب" خوانده می شود، به ما می گوید که نقطه (x_1, x_2, \dots, x_n) دارای x_1 به عنوان مختص اول، x_2 به عنوان مختص دوم، \dots و x_n به عنوان مختص n

است. ما قبلاً "با معنی R^n به ازای $n = 1, 2, 3$ آشنا شده‌ایم. در واقع، $R^1 = R$ خط حقیقی، R^2 صفحه (فضای 2 بعدی)، و R^3 فضای سه‌بعدی معمولی (فضای 3 بعدی) است. فرض کنیم D زیرمجموعه‌ای از R^n باشد. منظور از یک تابع n متغیره x_1, x_2, \dots, x_n یعنی قاعده یا روندی مانند f که به هر نقطه (x_1, x_2, \dots, x_n) در D عدد حقیقی منحصر به فردی، که با $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ نموده می‌شود، منتسب می‌نماید. مثل همیشه، D قلمرو f نام دارد، و عدد $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ مقدار f در (x_1, x_2, \dots, x_n) نامیده می‌شود.

مثال ۶. توابع n متغیره در آمار فراوانند. مثلاً، "به ازای n عدد داده شده x_1, x_2, \dots, x_n (در اینجا به نام مقادیر نمونه)، متوسط یا میانگین \bar{x} آنها تابع

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

و پراش آنها s^2 تابع

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

می‌باشد.

فرض کنیم $z = f(x, y)$ یک تابع از دو متغیر x و y باشد. منظور از نمودار f یعنی نمودار معادله

$$z = f(x, y)$$

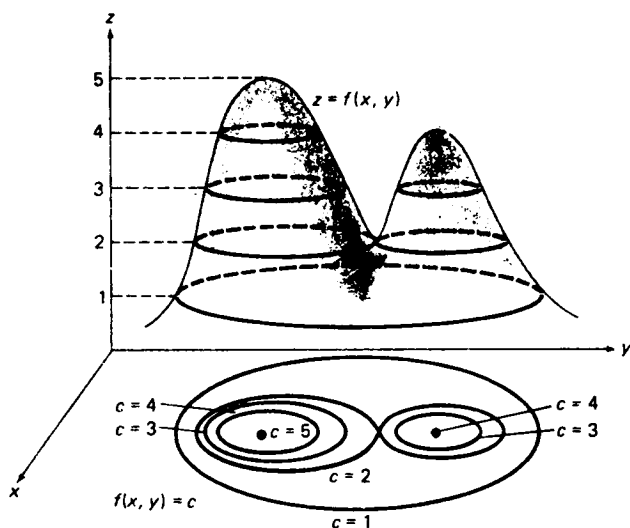
یعنی، مجموعه تمام نقاط (x, y, z) در R^3 که مختصات (قائم) آنها در این معادله صدق می‌کنند. اما رسم نمودار یک تابع سه‌متغیره یا بیشتر ممکن نیست، زیرا در فضای 3 بعدی برای نمودار یک معادله به شکل $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ با $n \geq 3$ ، که دست‌کم چهار متغیر x_1, x_2, \dots, x_n, u دارد، "جا به قدر کافی" موجود نیست.

منحنیهای تراز. منظور از منحنی تراز تابع دو متغیره $f(x, y)$ یعنی تصویر منحنی (یا مجموعه) فصل مشترک نمودار f با صفحه افقی $z = c$ روی صفحه xy ، که در آن c ثابتی در برد f می‌باشد. لذا، منحنی تراز نظیر به c ، به عنوان یک منحنی در صفحه xy ، دارای معادله

$$(۴) \quad f(x, y) = c$$

می‌باشد. توجه کنید که اشتراک نمودار f با صفحه $z = c$ در صورتی بر منحنی تراز (۴)

منطبق است که $c = 0$ ، و بالا یا پایین آن و در فاصله قائم $|c|$ قرار دارد . با رسم تعدادی از منحنیهای تراز تابع f و نشان دادن هر منحنی با مقدار مناسب c ، می توان ایده خوبی از شکل نمودار f به دست آورد . مثلاً ، در شکل ۲ سطحی رسم شده است شبیه کوهی که دو قله دارد ، که ما آن را نمودار تابعی چون $f(x, y)$ می گیریم ، و قسمت پایینی شکل چند منحنی تراز $f(x, y) = c$ نظیر به این تابع نموده شده اند . منحنی تراز به ازای $c = 5$ به یک نقطه تباه می شود ، و هر منحنی تراز به ازای $2 < c < 4$ از دو حلقهء مجزا تشکیل شده است (چرا ؟) .



شکل ۲

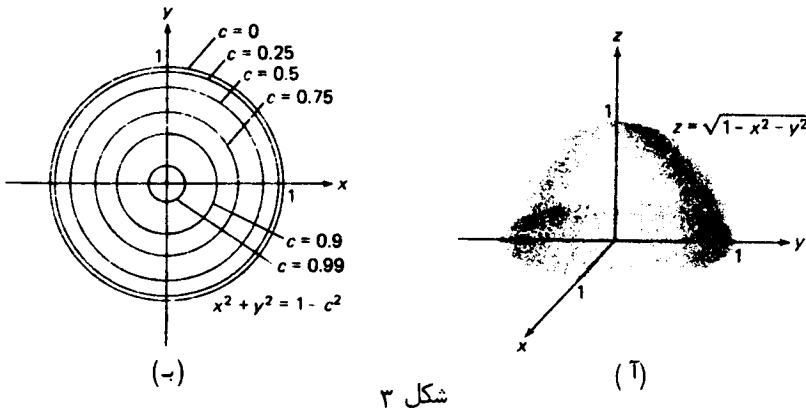
مثال ۷. نمودار تابع

$$(۵) \quad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

نیمکرهء شکل ۳ (آ) است [نیمهء بالایی کرهء یکهء $x^2 + y^2 + z^2 = 1$] ، ولی نمودار تابع به نوعی متفاوت

$$(۶) \quad z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (0 \leq x^2 + y^2 \leq 1)$$

مخروط مستدیر قائم شکل ۴ (آ) می باشد [بخشی از پارچهء پایین مخروط $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 0$] ، در واقع ، با گذاردن $z = c$ در (۵)



شکل ۳

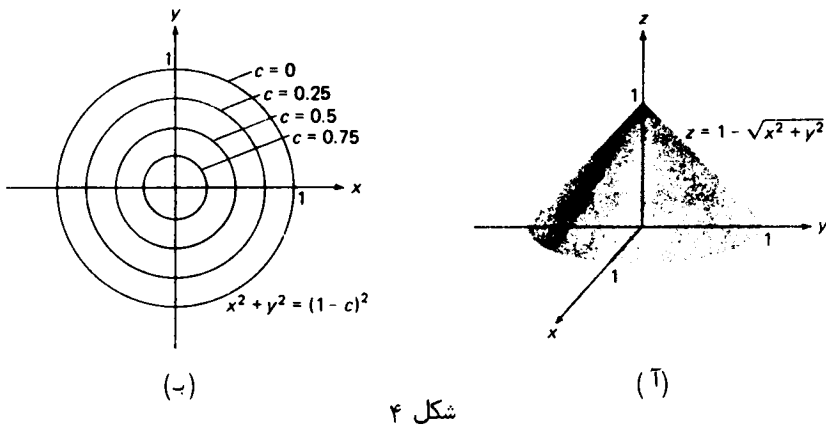
و (۶)، معادلات زیر به دست می‌آیند:

(۵')
$$x^2 + y^2 = 1 - c^2$$

و

(۶')
$$x^2 + y^2 = (1 - c)^2,$$

که نمودار هر دو به ازای $0 \leq c < 1$ دایره، و به ازای $c = 1$ نقطه $x = y = 0$ می‌باشد.



شکل ۴

ولی از مقایسه مشروح دو مجموعه^۶ منحنیهای تراز، داده شده در شکل‌های ۳ (ب) و ۴ (ب)، تفاوت مهمی در رفتارشان آشکار می‌شود. در نیمکره، منحنیهای تراز با c های کوچک شعاعهای نزدیک به ۱ دارند، زیرا در صعود از یک گنبد نیمکره‌ای ابتدا خیلی شیب است؛ همچنین منحنیهای تراز وجود دارند که مقادیر c آنها نزدیک ۱ بوده و شعاعهایی که به‌طور ملموس

با 0 متفاوتند، زیرا پیش از رسیدن به قله قسمت بالای گنبد نسبتاً تخت است. از آن سو، منحنیهای تراز مخروط "توزیع مقارنی" دارند (افزایشهای مساوی در c به کاهشهای مساوی در شعاع منحنیها منجر می شود). به این دلیل است که صعود از مخروط، از قاعده تا رأس، همیشه تحت زاویه یکسان 45° با افق صورت می گیرد.

در نقشه برداری از منحنیهای تراز به طور گسترده برای نمایش ارتفاع استفاده می شود. همچنین، آنها را در نقشه های هوا به کار می برند، که در آنها منحنیها با فشار ثابت هم فشار و منحنیها با دمای ثابت را همدم نامیده می شوند.

سطوح تراز. منظور از سطح تراز تابع $f(x, y, z)$ از سه متغیر یعنی نمودار معادله

$$(Y) \quad f(x, y, z) = c,$$

که در آن c ثابتی در برد f است. توجه کنید که معادله (Y) را می توان در فضای سه بعدی رسم کرد، و لولاینکه خود f میسر نباشد این بدان خاطر است که (Y) از معادله $u = f(x, y, z)$ با دادن مقدار ثابتی به متغیر وابسته u به دست آمده است.

مثال ۸. مجموعه سطوح تراز تابع

$$f(x, y, z) = x - 2y + 3z$$

مجموعه صفحات موازی

$$x - 2y + 3z = c \quad (-\infty < c < \infty),$$

یا، معادلاً، مجموعه تمام صفحات با $\mathbf{n} = (1, -2, 3)$ به عنوان یک بردار قائم است.

نمودارهای کامپیوتری. کامپیوتر الکترونیک جدید، در صورتی که صحیح برنامه ریزی شود، قادر است سطوح مشروح و دقیقی متناظر نمودارهای توابع دو متغیره رسم کند. در صفحه بعد چند نمونه از اشکال رسم شده توسط کامپیوتر دیده می شوند. منحنیهای هر سطح با انتساب مقادیر ثابت از -1.5 تا 1.5 به x یا y به دست آمده اند، و هر سطح از بالای ربع چهارم صفحه xy نظاره شده است.

مسائل

مقدار تابع $f(x, y) = \frac{2x - y}{x - 2y}$ را در هر نقطه زیر بیابید.

$(-4, 5)$. ✓ $(1, 0)$. ۲ $(0, 1)$. ✓

$(\pi, -\pi)$. ۶ $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. ۵ ✓ $(11, -7)$. ۴

مقدار تابع $g(x, y) = \frac{\sin x}{\cos y}$ را در هر نقطه زیر بیابید .

$(\pi/4, 3\pi/4)$. ۸ $(\pi/3, \pi/3)$. ۷ ✓

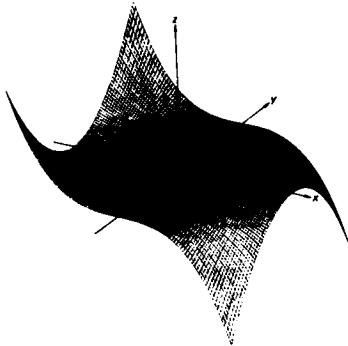
$(5\pi/6, -\pi/6)$. ۱۰ $(\pi, 2\pi)$. ۹ ✓

$(1, -1)$. ۱۲ $(\arctan 2, \arctan 3)$. ۱۱ ✓

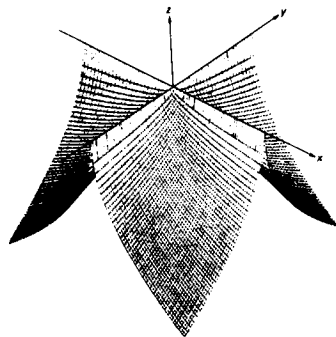
مقدار تابع $f(x, y, z) = \ln xyz$ را در هر نقطه زیر بیابید .

$(-1, 1, -1)$. ۱۴ $(e, 1, 1)$. ۱۳ ✓

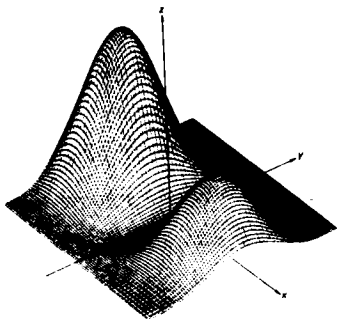
$(\sqrt{e}, \sqrt{e}, \sqrt{e})$. ۱۶ ✓ (e, e^2, e^3) . ۱۵ ✓



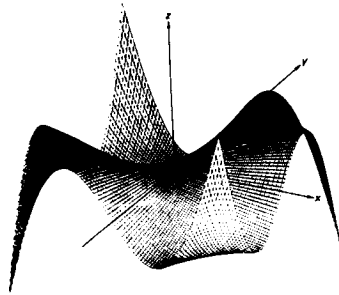
$z = -10x^2y^2$



$z = -10\sqrt{|xy|}$



$z = (1.5 - \frac{z}{2})(2.25 - y^2) \sin^2(\frac{x}{2})$



$z = xy \cos(ey)$

ترسیمات کامپیوتری فوق توسط نورتون استار از کالج امهرست طراحی شده است ، و ما با اجازه وی به چاپ آنها مبادرت کرده ایم .

مقدار تابع $g(x, y, z) = 2^{xy/z}$ را در هر نقطه زیر بیابید .

(5, -1, 10) . ۱۸

$(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$. ۱۷ ✓

(9, 4, 12) . ۲۰ ✓

$(\log_2 \pi, 1, \frac{1}{2})$. ۱۹ ✓

مقدار تابع

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{x_1 x_2 \dots x_n}$$

را در هر نقطه زیر بیابید .

(a, a, \dots, a) . ۲۲

(1, 1, \dots, 1) . ۲۳

(1, 2, \dots, n) . ۲۴

(1/n, 1/n, \dots, 1/n) . ۲۳ ✓

۲۵ . فرض کنید $f(x, y) = \ln(x/y)$ ، $g(t) = e^t$ ، و $h(t) = 1/t$ را بیابید .

۲۶ . $f(x, y)$ را در صورتی بیابید که $f(x+y, x-y) = 2xy + y^2$.

۲۷ . فرض کنید $w(x, y) = 1/xy^2$ ، $v(x, y) = x^2y$ ، $u(x, y) = 2 \sin(x/y)$ ، $z = x \cos yz$ را بیابید .

$f(u(x, y), v(x, y), w(x, y))$ را پیدا نمایید .

۲۸ . فرض کنید $F(x, y, z) = e^{xyz}$ ، $f(t) = \ln t$ ، $g(t) = t^2$ ، و $h(t) = 1/t^3$ را بیابید .

را پیدا نمایید .

۲۹ . تابع $f(s, s^3, \dots, s^{2n-1})$ را در صورتی بیابید که $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \ln(x_1 x_2 \dots x_n)$.

۳۰ . $\phi(u, v, w) = 2^u 3^v 4^w$ را در صورتی بیابید که $\phi(u(1, -1, 1), v(1, -1, 1), w(1, -1, 1))$.

$u(x, y, z) = xy$ ، $v(x, y, z) = x + y + z$ ، و $w(x, y, z) = xy + xz + yz$.

قلمرو (طبیعی) تابع داده شده از چند متغیر را توصیف کنید .

$z = \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$. ۳۲

$z = \sqrt{9-x^2-y^2}$. ۳۱

$z = \frac{xy}{x-y}$. ۳۴

$z = x^2 - y^2$. ۳۳

$z = \frac{1}{x^2 - y}$. ۳۶

$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. ۳۵

$z = \ln(xy)$. ۳۸

$z = \ln(x+y)$. ۳۷

$u = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. ۴۰

$z = y + \arccos x$. ۳۹

$u = \sqrt{16-x^2-y^2-z^2}$. ۴۲

$u = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$. ۴۱

$$u = \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z \quad (۴۴)$$

$$u = e^{xy/z} \quad (۴۳)$$

نمودار تابع داده شده از دو متغیر را توصیف نمایید.

$$z = 1 - x^2 - y^2 \quad (۴۶)$$

$$z = 2x + 3y \quad (۴۵)$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (۴۸)$$

$$z = -\sqrt{16 - x^2 - y^2} \quad (۴۷)$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \quad (۴۹)$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \quad (۴۹)$$

منحنیهای تراز $f(x, y) = c$ تابع داده شده از دو متغیر را به ازای مقادیر مشخص شده از c رسم نمایید.

$$f(x, y) = x - 2y, c = 0, \pm 1, \pm 2 \quad (۵۱)$$

$$f(x, y) = 1 - |x| - |y|, c = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1 \quad (۵۲)$$

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2, c = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (۵۳)$$

$$f(x, y) = y/x^2 \quad (f(0, 0) = 0), c = 0, \pm 1, \pm 2 \quad (۵۴)$$

$$f(x, y) = xy, c = 0, \pm 1, \pm 2 \quad (۵۵)$$

$$f(x, y) = y - \cos x, c = 0, \pm 1, \pm 2 \quad (۵۶)$$

سطوح تراز $f(x, y, z) = c$ تابع داده شده از سه متغیر را توصیف نمایید.

$$f(x, y, z) = x + y + z \quad (-\infty < c < \infty) \quad (۵۷)$$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (0 \leq c < \infty) \quad (۵۸)$$

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 \quad (0 \leq c < \infty) \quad (۵۹)$$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 \quad (-\infty < c < \infty) \quad (۶۰)$$

۲۰۱۳ حدود و پیوستگی

حال حدود و پیوستگی را برای توابع چندمتغیره مطرح می‌کنیم. بحث را با تعمیم مفهوم همسایگی به فضای دو یا چندبعدی آغاز می‌کنیم. فرض کنیم $P_0 = (a, b)$ نقطه ثابتی در صفحه، δ عددی مثبت، و N مجموعه تمام نقاطی چون $P = (x, y)$ با خاصیت

$$(۱) \quad |P_0P| < \delta$$

باشد که در آن $|P_0P|$ فاصله بین P_0 و P است. برحسب مختصات، N مجموعه تمام نقاط (x, y) است که

$$(۱') \quad \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta,$$

یعنی، درون دایره

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \delta^2$$

به شعاع δ و مرکز (a, b) . هر ناحیه از این نوع یک همسایگی از نقطه $P_0 = (a, b)$ نام دارد.

واضح است که N تعمیم دوبعدی همسایگی یک بعدی $\{x: |x - a| < \delta\}$ می‌باشد. جوهر نامساوی (۱)، به خلاف (۱')، آن است که n ، یعنی تعداد متغیرهای مستقل را نامشخص می‌گذارد. اگر $n = 3$ ، می‌نویسیم $P_0 = (a, b, c)$ و $P = (x, y, z)$ ، و در این صورت مجموعه N تعریف شده با (۱) درون کره^۶

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = \delta^2$$

به شعاع δ و مرکز (a, b, c) است. ما مجدداً N را یک همسایگی می‌نامیم، این بار نقطه^۷ $P_0 = (a, b, c)$ در فضای ۳ بعدی است. به‌طور کلی، فرض کنیم فاصله^۸ بین نقطه^۹ ثابت $P_0 = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ و نقطه^{۱۰} متغیر $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ در فضای n بعدی به‌صورت زیر تعریف شود:

$$|P_0P| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2}$$

که این فرمول به ازای $n = 1, 2, 3$ به فرمولهایی بدل می‌شود که قبلاً^{۱۱} برای فاصله برخط، در صفحه، و در فضای ۳ بعدی داشتیم. منظور از همسایگی P_0 هنوز یعنی مجموعه^{۱۲} تمام نقاطی چون P که در نامساوی (۱) صدق می‌کنند، و می‌توان آن را درون "کره^{۱۳} n بعدی"

$$\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 = \delta^2$$

به شعاع δ و مرکز (a_1, a_2, \dots, a_n) تصور کرد. باید گفت که نمی‌توان کره^{۱۴} n بعدی را به‌ازای $n > 3$ کشید، ولی این ارزش مفهومی چنین ایده‌ای را پایین نخواهد آورد.

منظور از همسایگی سفته^{۱۵} نقطه^{۱۶} P_0 در فضای n بعدی یعنی همسایگی از P_0 که نقطه^{۱۷} P_0 از آن حذف شده باشد. به عبارت دیگر، اگر N همسایگی P_0 باشد که با نامساوی (۱) تعریف شده باشد، همسایگی سفته^{۱۸} نظیر P_0 مجموعه^{۱۹} تعریف شده با نامساوی مضاعف $0 < |P_0P| < \delta$ می‌باشد.

حد تابع چندمتغیره. برای تعریف حد تابع چندمتغیره، فقط کافی است تعریف حد تابع یک متغیره را، که در صفحه^{۲۰} ۱۱۸ داده شد، کمی تعدیل کنیم. طرز کار به صورت زیر است. فرض کنیم $f(P)$ یک تابع چندمتغیره باشد که در همسایگی سفته‌ای از P_0 تعریف شده است. همانطور که برحسب مختصات $P_0 = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ و $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ، $f(P)$ اختصاری است برای $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. در این صورت، گوئیم وقتی P به P_0 نزدیک شود، $f(P)$ به حد L نزدیک می‌شود (یا در P_0 دارای حد L است) اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ بتوان $\delta > 0$ ای یافت به طوری که هر وقت $0 < |P_0P| < \delta$ ، $0 < |f(P) - L| < \varepsilon$. این

مطلب را به صورت

$$(۲) \quad \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = L$$

یا

$$(۲') \quad f(P) \rightarrow L, \quad P \rightarrow P_0 \text{ وقتی}$$

بیان می‌کنیم. همچنین، وقتی گوئیم $f(P)$ در P_0 حد دارد یعنی عددی مانند L موجود است به طوری که وقتی $f(P) \rightarrow L, P \rightarrow P_0$ فرض کنیم $f(P) = f(x, y)$ یک تابع دو متغیره با حد L در نقطه $P_0 = (a, b)$ بوده و $P = (x, y)$ در امتداد منحنی C مار بر P_0 به P_0 نزدیک شود. در این صورت، "حد جزئی"

$$(۳) \quad \lim_{P \rightarrow P_0, P \in C} f(P)$$

به دست می‌آید که شبیه حد یکطرفه در تابع یک متغیره می‌باشد. به طور دقیقتر، هرگاه C به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

باشد که به ازای t_0 در (α, β) ، $x(t_0) = a, y(t_0) = b$ ، آنگاه (۳) به معنی

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(x(t), y(t))$$

می‌باشد. از تعریف حد فوراً نتیجه می‌شود که (۳)، صرف نظر از C ، موجود و مساوی L می‌باشد. بالاخره، تعریف چیزی را به نحوه نزدیک شدن P به P_0 نمی‌گوید. بخصوص، P می‌تواند در امتداد خط افقی $y = b$ یا خط قائم $x = a$ به P_0 نزدیک شود. از این راه دو حد

$$(۴) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x, b)$$

و

$$(۴') \quad \lim_{y \rightarrow b} f(a, y)$$

به دست می‌آیند، که هر یک حد یک تابع یک متغیره است. این حدود باید مساوی حد (۲) باشند، که آن را به طور صریحتر زیر نشان می‌دهیم:

$$(۵) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y).$$

لذا، اگر حدود (۴) و (۴') موجود نباشند، یا وجود داشته ولی مساوی نباشند، حد (۵) تابع $f(x, y)$ از دو متغیره وجود ندارد.

مثال ۱. تابع

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 \neq 0)$$

در مبدا $(0, 0)$ حد ندارد. در واقع، اگر (x, y) ابتدا در امتداد محور x و سپس در امتداد محور y به مبدا نزدیک شود، خواهیم داشت

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

چون این دو حد نابرابرند، حد

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

وجود نخواهد داشت.

مثال ۲. هرگاه

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 \neq 0),$$

آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0,$$

در نتیجه، وقتی $P = (x, y)$ در امتداد محور x به $(0, 0)$ ، و نیز در امتداد محور y به $(0, 0)$ نزدیک شود، $f(x, y) \rightarrow 0$. آیا از این می‌توان نتیجه گرفت که

$$(۶) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

موجود و مساوی ۰ است؟ خیر، نمی‌توان از این فرض کنیم P در امتداد خط $y = mx$ به شیب m به مبدا نزدیک شود. در این صورت، حد جزئی نظیر مساوی است با

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2},$$

که مقدارش با m تغییر می‌کند و بخصوص اگر $m \neq 0$ ناصفر است. لذا، حد (۶) موجود

نیست .

پیوستگی یک تابع چند متغیره . پیوستگی توابع چند متغیره درست مثل توابع یک متغیره تعریف می شود . لذا ، اگر $f(P)$ یک تابع چند متغیره باشد که در همسایگی نقطه P_0 تعریف شده است ، گوئیم $f(P)$ در P_0 پیوسته است اگر $f(P)$ در P_0 حد داشته و این حد مساوی $f(P)$ در P_0 باشد . در نتیجه ،

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0).$$

به زبان δ ، ϵ ، گوئیم $f(P)$ در P_0 پیوسته است اگر به ازای هر $\epsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای موجود باشد به طوری که هر وقت $|P_0 P| < \delta$ ، $|f(P) - f(P_0)| < \epsilon$ (بحث مربوطه در صفحات ۱۸ تا ۱۱۹ را به یاد آورید) .

مثال ۳ . فرض کنیم $f(x, y)$ مستقل از y باشد ، در نتیجه $f(x, y) = g(x)$ ، و نیز $g(x)$ در a پیوسته باشد . در این صورت ، به ازای h دلخواه ، $f(x, y)$ در (a, b) پیوسته است . در واقع به ازای $\epsilon > 0$ داده شده ، $\delta > 0$ ای هست به طوری که هر وقت $|x - a| < \delta$ ، $|g(x) - g(a)| < \epsilon$ ، در این صورت ، به ازای همین ϵ و δ ،

$$|P_0 P| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta$$

نامساوی $|x - a| < \delta$ را ایجاب می کند ، که خود نتیجه می دهد که

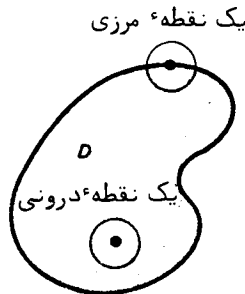
$$|f(x, y) - f(a, b)| = |g(x) - g(a)| < \epsilon,$$

نشانگر آنکه $f(x, y)$ در (a, b) پیوسته است . به همین نحو ، هرگاه $f(x, y)$ مستقل از x باشد ، در نتیجه $f(x, y) = h(y)$ ، و $h(y)$ در b پیوسته باشد ، آنگاه ، به ازای a ی دلخواه ، $f(x, y)$ در (a, b) پیوسته می باشد .

مثال ۴ . فرض کنیم $f(x, y)$ و $g(x, y)$ در (a, b) پیوسته باشند . در این صورت ، $f(x, y) \pm g(x, y)$ ، $f(x, y)g(x, y)$ و $f(x, y)/g(x, y)$ نیز چنین اند مشروط بر اینکه در آخرین حالت $g(a, b) \neq 0$ این امر از مشابه قضیه ۷ ، صفحه ۱۳۵ ، برای توابع چند متغیره نتیجه می شود . لذا ، تابع $(2x^3 - 3y)/(x^2 + xy^2 - 1)$ در نقاط تعریف شده پیوسته می باشد . همین امر در مورد تابع $\tan(e^{xy})$ درست است ، و این به خاطر تعمیم زیر از نتیجه صفحه ۱۴۱ است که به آسانی ثابت می شود : هرگاه $g(x, y)$ در (a, b) و $f(t)$ در $g(a, b)$ پیوسته باشد ، آنگاه $f(g(x, y))$ در (a, b) پیوسته می باشد . به دلیلی مشابه ، می توان پیوستگی توابع سه متغیره ای چون

$\sin(xy + xz + yz)$ و $\cosh xyz$ را به شوت رسانید .

ردمبندی نقاط و مجموعه‌ها در فضای n بعدی . اصطلاح زیر در بررسی توابع چند متغیره مفید است . فرض کنیم D مجموعه‌ای از نقاط در فضای n بعدی باشد . در این صورت، نقطه‌ P یک نقطه‌ D درونی است اگر همسایگی از P موجود باشد که فقط نقاط D را شامل شود . نقطه‌ P یک نقطه‌ D مرزی نام دارد اگر هر همسایگی P شامل نقاطی متعلق به D و نقاطی غیرمتعلق به D باشد . این تعاریف در شکل ۵ برای حالتی که D مجموعه‌ای از نقاط در صفحه است شرح داده شده‌اند . یک نقطه‌ D درونی باید نقطه‌ای از D باشد (چرا؟) ، ولی یک نقطه‌ D مرزی ممکن است نقطه‌ای از D باشد یا نباشد . گوییم مجموعه‌ D باز است اگر تمام نقاطش نقطه‌ D درونی باشند ، و بسته است اگر شامل تمام نقاط مرزی خود باشد .



شکل ۵

مجموعه‌ D تمام نقاط مرزی D مرز D نامیده می‌شود . لذا ، یک مجموعه‌ D بسته شامل مرز خودش است ، ولی یک مجموعه‌ D باز چنین نخواهد بود .

مثال ۵ . مجموعه‌ D نقاطی از صفحه‌ xy که با نامساویهای $0 < x < 1$ ، $0 < y < 1$ تعریف شده باشد باز ، و مجموعه‌ D تعریف شده با $0 \leq x \leq 1$ ، $0 \leq y \leq 1$ بسته ، و مجموعه‌ D تعریف شده با $0 \leq x \leq 1$ ، $0 < y < 1$ نه باز است نه بسته . هر سه مجموعه مرز یکسانی دارند ، و آن عبارت است از مربع به رئوس $(0, 0)$ ، $(0, 1)$ ، $(1, 0)$ ، و $(1, 1)$.

پیوستگی بر یک مجموعه . گوییم تابع چندمتغیره‌ f بر مجموعه‌ D (که لزوماً " قلمرو f نیست) در فضای n بعدی پیوسته است اگر f در هر نقطه از D پیوسته باشد ؛ یعنی ، به ازای هر نقطه‌ P_0 در D ، وقتی $P \rightarrow P_0$ ، $f(P) \rightarrow f(P_0)$. تعریف قبلی ما از حد تابع در یک

نقطه فقط برای نقاط درونی D کارساز است، ولی با تعدیلی مختصر برای نقاط مرزی نیز کارا می شود. به طور مشخص، فرض کنیم P_0 یک نقطه مرزی D باشد. گوییم $f(P)$ در P_0 دارای حد L است اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای موجود باشد به طوری که هر وقت P متعلق به D بوده و $0 < |P_0 P| < \delta$ ، $|f(P) - L| < \varepsilon$. به عبارت دیگر، لازم نیست نامساوی $|f(P) - L| < \varepsilon$ به ازای جمیع نقاط فضای n بعدی به قدر کافی نزدیک P_0 برقرار باشد، بلکه فقط برای تمام نقاط مجموعه D به قدر کافی نزدیک P_0 (غیر از خود P_0) کفایت می کند. توجه کنید که اگر P_0 یک نقطه درونی D باشد، این تعریف حد شامل تعریف قبلی می شود (چرا؟). حال می توان راجع به پیوستگی f در نقطه مرزی P_0 از D سخن گفت مشروط بر اینکه البته f در P_0 تعریف شده باشد. در صفحه ۱۵۰ از همین روش برای تعریف پیوستگی تابع یک متغیره در نقاط انتهایی بازه استفاده شد.

مثال ۶. تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت،} \end{cases}$$

بر تمام صفحه xy پیوسته نیست، زیرا $f(x, y)$ در هیچ نقطه از دایره $x^2 + y^2 = 1$ حد ندارد (چرا ندارد؟). اما $f(x, y)$ بر قرص $x^2 + y^2 < 1$ پیوسته است. این امر فوراً "تعریف تعدیل شده" حد و اینکه f بر قرص D مقدار ثابت ۱ را دارد نتیجه می شود.

مسائل

حد داده شده را (در صورت وجود) حساب کنید.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\sqrt{3}, -1)} \sqrt{x^2 - y^3} \quad (۲)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} (3xy - 2x^2) \quad (۱)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} \quad (۴)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \quad (۳)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,5)} e^{x^2 - xy} \quad (۶)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi, 1/4)} x^2 \tan xy \quad (۵)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{x} \quad (۸)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^4} \quad (۷)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4, -\infty)} \tan^{-1}(x + y) \quad (۱۰)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, 1)} \arctan \frac{x}{y} \quad (۹)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,-1,e)} \ln(xy^2z^3) \quad (۱۲)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (۱۱)$$

۱۳. نشان دهید که تابع

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

با آنکه در امتداد هر خط مستقیم مار بر 0 به حد یکسانی نزدیک می‌شود، در مبداً حد ندارد.

۱۴. یک مجموعه^۱ بسته در فضای 2 بعدی مثال بزنید که نقطه^۲ درونی نداشته باشد.
آیا تابع داده شده^۳ f بر مجموعه^۴ مشخص شده^۵ D پیوسته است؟ جواب خود را توضیح دهید.

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}, D = \{(x, y): (x-1)^2 + y^2 < \frac{1}{2}\} \quad ۱۵$$

$$f(x, y) = \cot \pi xy, D = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y \leq 1\} \quad ۱۶$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sin \pi x} + \frac{1}{\sin \pi y}, D = \{(x, y): (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}\} \quad ۱۷$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y} \quad D, \text{ مثل مسئله } ۱۷ \quad ۱۸$$

$$f(x, y, z) = \frac{x + y + z}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}, D = \{(x, y, z): x^2 + 4y^2 + 4z^2 \leq 1\} \quad ۱۹$$

$$f(x, y, z) = \ln xyz, D = \{(x, y, z): (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 < 1\} \quad ۲۰$$

۳.۱۳ مشتقات جزئی

فرض کنیم f یک تابع n متغیره باشد که در همسایگی نقطه^۱ (x_1, x_2, \dots, x_n) تعریف شده است. منظور از مشتق جزئی f نسبت به x_i در (x_1, x_2, \dots, x_n) که با عبارت

$$(۱) \quad \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i}$$

نموده می‌شود یعنی حد

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

که در آن به x_i نمو Δx_i داده شده ولی سایر متغیرها همه ثابت گرفته شده‌اند، مشروط بر

اینکه این حد موجود و متناهی باشد. واضح است که می‌توان n مشتق جزئی در نظر گرفت، به ازای هر یک از n متغیر مستقل x_1, x_2, \dots, x_n یکی. تابع دو متغیره $f(x, y)$ دو مشتق جزئی دارد، که عبارتند از

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

و

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

مشروط براینکه این حدود موجود و متناهی باشند.

اگر علامت $\partial/\partial x_i$ را موجود واحدی بگیریم که عملش تشکیل مشتق جزئی تابع آمده بعد از آن نسبت به x_i باشد، می‌توان (۱) را به صورت زیر نیز نوشت:

$$(۱') \quad \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

علامت ∂ را می‌توان هنوز "دی" خواند و لوائینکه در اینجا با "دی خمیده" سروکار داریم. شناسه‌ها اغلب حذف می‌شوند، و لذا مشتق جزئی (۱) را می‌توان به صورت فشرده $\partial f/\partial x_i$ نوشت. برای محاسبه $\partial f/\partial x_i$ فقط کافی است تمام متغیرهای مستقل جز x_i را ثابت بگیریم. لذا، برای محاسبه مشتقات جزئی به تکنیک دیگری نیاز نداریم.

مثال ۱. فرض کنیم $f(x, y) = xe^{xy}$. در این صورت، طبق قاعده حاصل ضرب،

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (xe^{xy}) = e^{xy} + xye^{xy},$$

که در محاسبه y را ثابت و d/dx گرفته‌ایم، و

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (xe^{xy}) = x^2 e^{xy},$$

که در محاسبه x را ثابت و $\partial/\partial y$ را d/dy گرفته‌ایم. این مشتقات جزئی در هر نقطه (x, y) از صفحه تعریف شده‌اند.

مثال ۲. هرگاه

$$f(x, y, z) = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}},$$

آنگاه، در هر نقطه (x, y, z) از فضا غیراز مبدا $(0, 0, 0)$ ،

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{1}{2} \frac{2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

به آسانی می توان تحقیق کرد که دو مشتق جزئی دیگر f عبارتند از

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

نمادهای دیگری نیز برای مشتقات جزئی وجود دارند. اگر متغیر وابسته

$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ را معرفی کنیم، می توانیم به جای $\partial f / \partial x_i$ بنویسیم $\partial u / \partial x_i$. یک

نماد متداول f_{x_i} و u_{x_i} به جای $\partial f / \partial x_i$ و $\partial u / \partial x_i$ است، که در آنها زیرنویس x_i یعنی مشتگیری

(جزئی) نسبت به x_i می باشد. مثلا، " هرگاه

$$u = f(x, y, z) = xy^2 \sin yz,$$

آنگاه

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_x(x, y, z) = y^2 \sin yz,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_y(x, y, z) = 2xy \sin yz + xy^2 z \cos yz,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = f_z(x, y, z) = xy^3 \cos yz.$$

مثال ۳. بنابر قانون گاز کامل، فشار p ، حجم V ، و دمای مطلق T یک مل گاز محبوس با

فرمول

$$pV = RT$$

به هم مربوطند، که در آن R ثابت تناسب است که به ثابت عمومی گاز معروف می باشد.

چون

$$V = \frac{RT}{p}, \quad p = \frac{RT}{V}, \quad T = \frac{pV}{R},$$

داریم

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{p}, \quad \frac{\partial V}{\partial p} = -\frac{RT}{p^2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{V}, \quad \frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{RT}{V^2},$$

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{V}{R}, \quad \frac{\partial T}{\partial V} = \frac{p}{R}$$

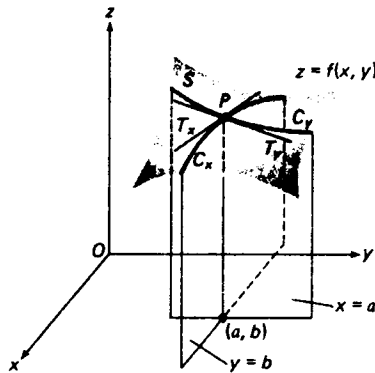
پس نتیجه می شود که

$$\frac{\partial p}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial p} = \left(-\frac{RT}{V^2} \right) \left(\frac{R}{p} \right) \left(\frac{V}{R} \right) = -\frac{RT}{pV} = -1.$$

این فرمول باید شما را متقاعد سازد که عبارت سمت چپ را نمی توان حاصل ضرب سه کسر تلقی کرد!

در مسائل کار بسته اغلب تصور مشتق جزئی به عنوان میزان تغییر یک متغیر وابسته نسبت به یک متغیر مستقل، در حالی که سایر متغیرهای مستقل ثابت گرفته شده اند، یاری دهنده است. لذا، در مثال قبل میزان تغییر حجم نسبت به دما در فشار ثابت $(\partial V/\partial T)$ و میزان تغییر دما نسبت به فشار در حجم ثابت $(\partial T/\partial p)$ را حساب کرده ایم. ما همچنین چهار میزان تغییر دیگر را نیز محاسبه کرده ایم (آنها را توصیف نمایید).

به آسانی می توان مشتقات جزئی تابع دو متغیره $z = f(x, y)$ را تعبیر هندسی کرد. فرض کنیم f در همسایگی نقطه (a, b) از صفحه xy تعریف شده باشد، و $P = (a, b, f(a, b))$ نقطه نظیر نمودار f باشد که سطحی مانند S در فضاست. در این صورت، صفحه $y = b$ سطح S را در منحنی C_x قطع می کند که از P می گذرد، و صفحه $x = a$ سطح S را در منحنی دیگر C_y قطع می کند که آن نیز از P می گذرد (ر. ک. شکل ۶). فرض کنیم تابع f دارای مشتقات جزئی $f_x(a, b)$ و $f_y(a, b)$ در نقطه (a, b) باشد. در این صورت، C_x در P خط مماسی به شیب $f_x(a, b)$ دارد، و C_y نیز خط مماسی در P منتها با شیب $f_y(a, b)$ خواهد داشت. در



شکل ۶

شکل ، این دو خط مماس با T_x و T_y نموده شده‌اند .

مشتقات جزئی مراتب بالاتر . مشتقات جزئی که هم اکنون معرفی شدند مشتقات اول می‌باشند . مشتقات جزئی مراتب بالاتر به طور طبیعی تعریف می‌شوند . مثلاً " ، فرض کنیم $f(x, y)$ یک تابع دومتغیره باشد که در هر نقطه از یک مجموعه ، باز مشتقات جزئی (اول) $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ دارد . در این صورت ، f چهارمشتق جزئی دوم دارد که عبارتند از

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

و مشتقات " مخلوط "

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right),$$

که فقط در ترتیب مشتقگیری متفاوتند (برای محاسبه $\partial^2 f/\partial x \partial y$ ، ابتدا نسبت به y و سپس نسبت به x مشتق می‌گیریم ، حال آنکه $\partial^2 f/\partial y \partial x$ با مشتقگیری به ترتیب عکس محاسبه می‌شود) . با استفاده از نماد زیرنویس می‌توان این مشتقات جزئی دوم را به صورت زیر نیز نوشت :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}.$$

توجه کنید که در f_{yx} ابتدا نسبت به y زیرنویس اول و y و سپس نسبت به x زیرنویس دوم x مشتق می‌گیریم . این عکس ترتیب متغیرهای x و y در مخرج عبارت $\partial^2 f/\partial x \partial y$ است ، ولی ترتیب مناسبی است زیرا f_{yx} باید به معنی $(f_y)_x$ ، یعنی مشتق f_y (که خود مشتق f نسبت به y است) نسبت به x ، باشد .

البته ، همه اینها مبتنی بر این فرض است که حدود معرف این مشتقات جزئی دوم موجود و متناهی‌اند . یک نمونه از این‌گونه حد عبارت است از

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_y(x + \Delta x, y) - f_y(x, y)}{\Delta x}.$$

اگر متغیر وابسته $z = f(x, y)$ وجود داشته‌باشد ، می‌توان به جای $\partial^2 f/\partial x^2$ نوشت $\partial^2 z/\partial x^2$ یا z_{xx} ، به جای $\partial^2 f/\partial x \partial y$ نوشت $\partial^2 z/\partial x \partial y$ یا z_{yx} ، و غیره . مشتقات جزئی مراتب بالاتر از دو و مشتقات جزئی مراتب بالاتر تسوابع با بیش از دو متغیر به صورتی که انتظار می‌رود تعریف می‌شوند . مثلاً " ، هرگاه $u = f(x, y, z)$ ، آنگاه

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) = (u_{xy})_x = u_{xyx},$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y \partial x \partial z^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} \right) = (u_{zzx})_y = u_{zzxy},$$

و غیره .

مثال ۴ . هرگاه

$$f(x, y, z) = xy \ln z \quad (z > 0),$$

آنگاه

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \ln z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \ln z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{xy}{z},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (y \ln z) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (x \ln z) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{xy}{z} \right) = -\frac{xy}{z^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (x \ln z) = \ln z, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (y \ln z) = \ln z,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{xy}{z} \right) = \frac{y}{z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z} (y \ln z) = \frac{y}{z},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{xy}{z} \right) = \frac{x}{z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} (x \ln z) = \frac{x}{z},$$

توجه کنید که در مثال فوق مقدار هر یک از مشتقات جزئی مخلوط از ترتیب مشتگیری مستقل است . به آسانی معلوم می شود که این در صورت پیوسته بودن مشتقات جزئی مخلوط همواره درست است ، ولی برهان آن در اینجا نخواهد آمد .

معادلات شامل مشتقات جزئی معادلات دیفرانسیل جزئی نام دارند ، در مقابل معادلات دیفرانسیل معمولی که تاکنون در نظر گرفته شده اند . یک مثال از معادلات دیفرانسیل جزئی معادله لاپلاس است :

$$(۲) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

که در مسائل بسیار در ریاضیات محض و کار بسته ظاهر می شود. منظور از مرتبه یک معادله دیفرانسیل جزئی یعنی مرتبه بالاترین مشتق جزئی آمده در معادله. مثلاً، معادله لاپلاس از مرتبه دو است، و همین طور

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

که معادله دیفرانسیل جزئی خاصی است که بر پخش یا هدایت گرمای یک بعدی حاکم است. جواب معادله لاپلاس (۲) را یک تابع توافقی می نامند.

مثال ۵. تابع $u = x^3 - 3xy^2$ توافقی است. در واقع، فوراً معلوم می شود که

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 - 3y^2) + \frac{\partial}{\partial y} (-6xy) = 6x - 6x = 0. \end{aligned}$$

به عنوان تمرین، نشان دهید که تابع $3x^2y - y^3$ نیز توافقی است.

مسائل

تمام مشتقات جزئی اول تابع داده شده را بیابید.

$f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$. ۲ ✓

$f(x, y) = x^2y^3 - x^3y^4$. ۱ ✓

$f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$. ۴ ✓

$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$. ۳ ✓

$f(x, y) = e^{-x/y}$. ۶ ✓

$f(x, y) = \ln(x^3 - y^2)$. ۵ ✓

$f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$. ۸ ✓

$f(x, y) = e^{\sin xy}$. ۷ ✓

$g(u, v) = \tan(u^2 - v)$. ۱۰ ✓

$f(s, t) = \arctan \frac{t}{s}$. ۹ ✓

$k(x, y) = \cos \frac{x}{y} \sin \frac{y}{x}$. ۱۲ ✓

$h(x, y) = \ln(x + \ln y)$. ۱۱ ✓

$f(x, y) = 10^{xy}$. ۱۴ ✓

$f(x, y) = x^y$. ۱۳ ✓

$$f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x} \quad . ۱۶ \checkmark$$

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz \quad . ۱۵ \checkmark$$

$$f(x, y, z) = \sinh xyz \quad . ۱۸ \checkmark$$

$$f(x, y, z) = \ln xyz \quad . ۱۷ \checkmark$$

$$f(x, y, z) = e^{xyz} \quad . ۲۰ \checkmark$$

$$f(x, y, z) = x^{yz} \quad . ۱۹ \checkmark$$

هرگاه مشتقات جزئی مخلوط f_{xy} و f_{yx} پیوسته باشند، آنگاه $f_{xy} = f_{yx}$. این مطلب را برای هر تابع داده شده مستقیماً "تحقیق نمایید".

$$f(x, y) = x^2/y^2 \quad . ۲۲ \checkmark \quad f(x, y) = x^2y^4 - 2x^3y^3 + 3x^6y - 10 \quad . ۲۱ \checkmark$$

$$f(x, y, z) = e^{xyz} \quad . ۲۴ \checkmark \quad f(x, y) = y^x \quad . ۲۳ \checkmark$$

$$. ۲۵ \checkmark \quad \text{فرض کنید به ازای } x^2 + y^2 \neq 0$$

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

و $f(0, 0) = 0$. نشان دهید در مبدأ $f_{xy} \neq f_{yx}$. این مطلب را با این امرکه مشتقات جزئی مخلوط در صورت پیوسته بودن مساویند آشتی دهید.

. ۲۶ \checkmark فرض کنید $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ تبدیل از مختصات قطبی به مختصات قائم باشد. $\partial x / \partial r$ ، $\partial y / \partial r$ ، $\partial x / \partial \theta$ ، و $\partial y / \partial \theta$ را بیابید.

مشتقات جزئی دوم $z_{xy} = z_{yx}$ ، z_{xx} ، و z_{yy} تابع داده شده را بیابید.

$$z = x^3 \sin y + y^3 \cos x \quad . ۲۸ \checkmark$$

$$z = x^4y^2 - 3x^2y^3 + 6xy \quad . ۲۷ \checkmark$$

$$z = \ln(x^2 + y^2) \quad . ۳۰ \checkmark$$

$$z = e^{x^2y} \quad . ۲۹ \checkmark$$

$$z = \arctan xy \quad . ۳۲ \checkmark$$

$$z = \sin^2(3x - 4y) \quad . ۳۱ \checkmark$$

$$. ۳۳ \checkmark \quad u_{xx} \text{ را به ازای } u = 2^{xy} \text{ بیابید.}$$

$$. ۳۴ \checkmark \quad v_{yxx} \text{ را به ازای } v = \cos(x + \sin y) \text{ بیابید.}$$

$$. ۳۵ \checkmark \quad \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} \text{ را به ازای } u = x^m y^n \text{ بیابید.}$$

$$. ۳۶ \checkmark \quad \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2} \text{ را به ازای } u = \sin^2 x \cos^2 y \text{ بیابید.}$$

$$. ۳۷ \checkmark \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} \text{ را به ازای } u = \sin xy + \cos xz + \tan yz \text{ بیابید.}$$

$$. ۳۸ \checkmark \quad \frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial x \partial y} \text{ را به ازای } w = \frac{x}{y+z} \text{ بیابید.}$$

۳۹۷. تابع دومتغیره $f(x, y)$ چند مشتق جزئی مرتبه n دارد؟ فرض کنید هر مشتق از ترتیب مشتقگیری مستقل باشد، فرضی که در صورت پیوسته بودن مشتقات جزئی مخلوط موجه است.

۴۰ ✓ عبارت زیر را حساب کنید:

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} f(x)g(y)h(z),$$

که در آن f ، g ، و h توابع مشتقپذیری از یک متغیرند.

زاویه بین اضلاع مثلثی به طولهای x و y مساوی θ است. فرض کنید A مساحت مثلث بوده، و z طول ضلع سوم باشد.

۴۱ ✓ میزان تغییر A نسبت به θ را در صورتی بیابید که x و y ثابت باشند.

۴۲ ✓ میزان تغییر A نسبت به x را در صورتی بیابید که θ و y ثابت باشند.

۴۳ ✓ میزان تغییر z نسبت به y را در صورتی بیابید که θ و x ثابت باشند.

۴۴ ✓ میزان تغییر z نسبت به θ را در صورتی بیابید که x و y ثابت باشند.

۴۵ ✓ فصل مشترک صفحه $x = 1$ با هذلولی گون دوار دو پارچه $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ یک هذلولی است. معادلات پارامتری خط مماس بر این هذلولی را در نقطه $(1, 1, \sqrt{3})$ بنویسید.

۴۶ ✓ صفحه $-1 = y$ سهمی گون بیضی $0 = z - y^2 + 2x^2$ را در یک سهمی قطع می کند.

معادلات تقارنی خط مماس بر این سهمی در نقطه $(2, -1, 9)$ را بنویسید.

در آنالیز مختلط، که شاخه مهمی از علوم کار بسته است، دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه اول

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

معروف به معادلات گشی-ریمان، نقشی اساسی دارد. نشان دهید که هر جفت از توابع u

و v زیر در این معادلات صدق می کند.

$$u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4, v = 4x^3y - 4xy^3 \quad 47 \checkmark$$

$$u = e^x \cos y, v = e^x \sin y \quad 48 \checkmark$$

$$u = \cos x \cosh y, v = -\sin x \sinh y \quad 49 \checkmark$$

۵۰. نشان دهید که هر شش تابع مسائل ۴۷ تا ۴۹ توافقی اند. چرا انتظار این امر می رود؟

۵۱ ✓ نشان دهید که تابع

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (x^2 + y^2 + z^2 \neq 0)$$

جواب صورت سه بعدی معادله لاپلاس است :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

۵۲. نشان دهید که تابع

$$u = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/4t} \quad (t > 0)$$

جواب معادله دیفرانسیل جزئی $\partial u / \partial t = \partial^2 u / \partial x^2$ است. جوابی ساده تر بیابید که شامل نمایی باشد.

معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

که در آن c یک ثابت مثبت است، معادله موج نام دارد. نشان دهید که معادله داده شده جواب معادله موج است.

$$u = \sin x \sin ct \quad \cdot 54$$

$$u = x^2 + c^2 t^2 \quad \cdot 53$$

$$u = e^x \cosh ct \quad \cdot 55$$

۵۶. فرض کنید f و g توابع دلخواهی از یک متغیر با مشتقات دوم f'' و g'' باشند. نشان دهید که تابع $u = f(x + ct) + g(x - ct)$ جواب معادله موج است. هر یک از توابع مسائل ۵۳ تا ۵۵ را به این شکل بیان کنید.

۴۰۱۳ مشتق پذیری و دیفرانسیلها

گوییم تابع یک متغیره $f(x)$ در نقطه a مشتق پذیر است اگر $f'(a)$ موجود باشد. این نکات زیادی از رفتار f در مجاورت a را بازگو می کند. بخصوص، می گوید که f در مجاورت a تقریب خط مماس دارد (ر. ک. صفحه ۱۹۸). در حالت تابع دومتغیره $f(x, y)$ ، مشتقات جزئی $f_x(a, b)$ و $f_y(a, b)$ در نقطه $P = (a, b)$ اطلاعات نسبتاً کمی از رفتار f در مجاورت P به ما می دهند. در واقع، این مشتقات کاملاً به وسیله مقادیر f بر خطوط مار بر P موازی محورهای مختصات مشخص شده، و در صورت تغییر مقادیر f در سایر نقاط ثابت می مانند. این در شکل ۶، صفحه ۱۲۳۶، به این معنی است که سطح S را می توان، تا جایی که صفحات

۱. کلمه "موجود بودن" در مورد مشتق، معمولی یا جزئی، همواره به معنی "موجود و متناهی بودن" خواهد بود.

$x = a$ و $y = b$ سطح جدید را در همان منحنیهای C_x و C_y قطع کنند، بدون تغییر مقادیر $f_x(a, b)$ و $f_y(a, b)$ به هر صورتی که بخواهیم تغییر شکل داد. لذا، تعریف اینکه تابع $f(x, y)$ در صورتی مشتقپذیر است که فقط مشتقات جزئی $f_x = \partial f / \partial x$ و $f_y = \partial f / \partial y$ موجود باشند مناسب نخواهد بود. بخصوص، وجود مشتقات جزئی به تعمیم تقریب خط مماس، که ما واقعا "طالب آنیم، منجر نمی شود (در این خصوص، ر.ک. صفحه ۱۲۶۹). لذا، می پرسیم چطور باید مشتقپذیری یک تابع دو یا چند متغیره تعریف شود؟

جواب این سؤال از بررسی دقیقتر معنی مشتقپذیری تابع یک متغیره $f(x)$ ناشی

می شود. نمو

$$(1) \quad \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$$

را در نظر می گیریم، که تغییر مقدار f به ازای تغییر x از a به $a + \Delta x$ است. در این صورت، وجود $f'(a)$ به معنی

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(a),$$

یا معادلا

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(a) + \alpha(\Delta x),$$

است، که در آن $\alpha(\Delta x)$ تابعی است از Δx به طوری که

$$(2) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

(نتیجه ۲، صفحه ۱۳۱، را به یاد آورید). لذا، اگر $f'(a)$ موجود باشد، نمو (۱) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\Delta f = f'(a) \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x,$$

که در آن $\alpha(\Delta x)$ در (۲) صدق می کند. به عبارت دیگر، اگر $f(x)$ در a مشتقپذیر باشد، ثابتی چون A موجود است به طوری که

$$(3) \quad \Delta f = A \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x,$$

که در آن وقتی $\Delta x \rightarrow 0$ ، $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$. البته، $A = f'(a)$ ، ولی این امر به صورت (۳) بیان شده است، زیرا تعریفی از مشتقپذیری را می خواهیم که در آن ذکری از مشتق نشده باشد! در واقع، مشتقپذیری تابع دو متغیره $f(x, y)$ را، به جای استفاده از مشتقات جزئی f_x و f_y با تعمیم فرمول (۳) تعریف می کنیم.

تعریف مشتق پذیری. برای این کار، فرض کنیم $f(x, y)$ یک تابع دومتغیره^۴ تعریف شده در همسایگی نقطه^۵ (a, b) بوده، و نمو

$$(۴) \quad \Delta f = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

را در نظر می‌گیریم که تغییر مقدار f به ازای تغییر x از a تا $a + \Delta x$ و تغییر y از b تا $b + \Delta y$ می‌باشد. فرض کنیم به ازای هر نقطه^۶ $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ در همسایگی سفته^۷ (a, b) بتوان Δf را به شکل زیر

$$(۵) \quad \Delta f = A \Delta x + B \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \Delta y,$$

که مشابه (۳) است، نمایش داد که در آن A و B ثابت بوده، و $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ و $\beta(\Delta x, \Delta y)$ توابعی از Δx و Δy اند به طوری که

$$(۶) \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0, \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

در این صورت، گوئیم f در (a, b) مشتق پذیر است، و عبارت $A \Delta x + B \Delta y$ را دیفرانسیل (گل) f در (a, b) نامیده و با df نشان می‌دهیم؛ در نتیجه،

$$(۷) \quad df = A \Delta x + B \Delta y.$$

قضیه^۸ زیر شایستگی این تعریف مشتق پذیری را برای تابع دومتغیره^۹ f تأیید می‌کند. این قضیه نشان می‌دهد که خواص توابع مشتق پذیر دومتغیره خیلی شبیه خواص توابع مشتق پذیر یک متغیره می‌باشند.

قضیه^{۱۰} (نتایج مشتق پذیری). فرض کنیم f یک تابع دومتغیره باشد که در (a, b) مشتق پذیر است. در این صورت، f در (a, b) پیوسته بوده و دارای مشتقات جزئی f_x و f_y در (a, b) می‌باشد.

برهان. از فرمولهای (۴) و (۶) فوراً^{۱۱} نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \Delta f &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} [f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)] \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} [A \Delta x + B \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \Delta y] = 0, \end{aligned}$$

و این طریقه^{۱۲} نمو بیان آن است که f در (a, b) پیوسته می‌باشد. با قرار دادن $\Delta y = 0$ در (۴) و (۵)، به دست می‌آوریم

$$\Delta f = f(a + \Delta x, b) - f(a, b) = A \Delta x + \alpha(\Delta x, 0) \Delta x,$$

و در نتیجه، به خاطر (۶)،

$$f_x(a, b) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [A + \alpha(\Delta x, 0)] = A,$$

یعنی، $f_x(a, b)$ موجود و مساوی A می باشد. به همین نحو، $f_y(a, b)$ موجود و مساوی B می باشد.

نتیجه. هرگاه f در (a, b) مشتقپذیر باشد، آنگاه، به ازای تمام $|\Delta x|$ و $|\Delta y|$ های به قدر کافی کوچک،

$$\Delta f = [f_x(a, b) + \alpha(\Delta x, \Delta y)] \Delta x + [f_y(a, b) + \beta(\Delta x, \Delta y)] \Delta y$$

که در آن وقتی $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ ، $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ و $\beta(\Delta x, \Delta y)$ هر دو به صفر نزدیک می شوند و به علاوه،

$$(۸) \quad df = f_x(a, b) \Delta x + f_y(a, b) \Delta y.$$

برهان. $A = f_x(a, b)$ و $B = f_y(a, b)$ را در فرمولهای (۵) و (۷) بگذارید.

مثال ۱. هرگاه $f(x, y) = Ax + By$ و نقطه (a, b) دلخواه باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) \\ &= A(a + \Delta x) + B(b + \Delta y) - (Aa + Bb) \\ &= A \Delta x + B \Delta y, \end{aligned}$$

که به شکل (۵) به ازای $\alpha(\Delta x, \Delta y) \equiv 0$ و $\beta(\Delta x, \Delta y) \equiv 0$. بنابراین، f همه جا (یعنی، در هر نقطه از صفحه) مشتقپذیر یا دیفرانسیل $df = A \Delta x + B \Delta y$ است. توجه کنید که، همانند در نتیجه، $A = f_x$ ، $B = f_y$. هرگاه $A = 1$ و $B = 0$ ، آنگاه $f(x, y) = x$ و $df = dx = \Delta x$ ولی هرگاه $A = 0$ و $B = 1$ ، آنگاه $f(x, y) = y$ و $df = dy = \Delta y$ ، لذا، نمودارها و دیفرانسیلهای متغیرهای مستقل با هم مساویند.

مثال ۲. هرگاه $f(x, y) = 4x^2 - 3xy$ و (a, b) دلخواه باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) \\ &= 4(a + \Delta x)^2 - 3(a + \Delta x)(b + \Delta y) - (4a^2 - 3ab) \\ &= 8a \Delta x + 4(\Delta x)^2 - 3b \Delta x - 3a \Delta y - 3 \Delta x \Delta y \\ &= (8a - 3b) \Delta x - 3a \Delta y + 4(\Delta x)^2 - 3 \Delta x \Delta y, \end{aligned}$$

که به شکل (۵) به ازای $A = 8a - 3b$ ، $B = -3a$ ، $\alpha = 4 \Delta x$ ، و $\beta = -3 \Delta x$. لذا، چون وقتی $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ ، $\alpha \rightarrow 0$ و $\beta \rightarrow 0$ ، f همه جا مشتقپذیر است؛ دیفرانسیل

مساوی است با $df = (8a - 3b) \Delta x - 3a \Delta y$ ، که در آن $A = f_x(a, b)$ و $B = f_y(a, b)$.
توجه کنید که در این حالت توابع α و β منحصر به فرد نیستند؛ و در واقع می‌توان
 $\alpha = 4 \Delta x - 3 \Delta y$ و $\beta = 0$ را اختیار کرد .

چون $\Delta x = dx$ و $\Delta y = dy$ ، همانطور که در مثال ۱ دیدیم ، می‌توان به جای (۸)
نوشت

$$(۸) \quad df = f_x(a, b) dx + f_y(a, b) dy,$$

که به نوبه خود قابل نوشتن به صورت فشرده‌تر زیر است :

$$(۹) \quad df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

این فرمول دیفرانسیل کل df را به صورت مجموع " دیفرانسیلهای جزئی " $(\partial f / \partial x) dx$ و
 $(\partial f / \partial y) dy$ بیان می‌کند. تعمیم فرمول (۹) به تابع n متغیره $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ عبارت است
از

$$(۹') \quad df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

برای اثبات (۹') ، ابتدا مشتق‌پذیری و دیفرانسیل تابع n متغیره به کمک فرمولهایی تعریف
می‌شوند که تعمیم طبیعی فرمولهای (۵) تا (۷) می‌باشند. جزئیات را به عنوان تمرین
می‌گذاریم .

مثال ۳. دیفرانسیل کل تابع $f(x, y, z) = xy \ln z$ ، که در مثال ۴ ، صفحه ۱۲۳۸ ، در نظر
گرفته شد ، عبارت است از

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = (y \ln z) dx + (x \ln z) dy + \frac{xy}{z} dz.$$

می‌توان مشتق‌پذیری f را در هر نقطه (x, y, z) که $z > 0$ مستقیماً ثابت کرد ، ولی این امر
از قضیه ۲ زیر (که به توابع سه متغیره تعمیم یافته) آسانتر به دست می‌آید .

مثال ۴. تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x > 0 \text{ و } y > 0 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در مبدأ $O = (0, 0)$ پیوسته نیست ، زیرا هر همسایگی O شامل نقاطی است که در آنها f

مقدار 1 می‌گیرد و نیز حاوی نقاطی است که در آنها f مقدار 0 را دارد. پس از قضیه ۱ نتیجه می‌شود که f در O مشتقپذیر نیست. اما هر دو مشتق جزئی f_x و f_y در O وجود دارند. در واقع، f بر هر دو محور مختصات مقدار ثابت 0 را دارد؛ و لذا،

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0,$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

مثال فوق نشان می‌دهد که ممکن است یک تابع دومتغیره حتی با داشتن مشتقات جزئی مشتقپذیر نباشد. از آن سو، همانطور که در قضیه زیر ثابت شده است، یک تابع با مشتقات جزئی پیوسته باید مشتقپذیر باشد.

قضیه ۲ (پیوستگی مشتقات جزئی مشتقپذیری را ایجاب می‌کند). هرگاه f تابع دو متغیره‌ای با مشتقات جزئی f_x و f_y در همسایگی (a, b) بوده و این مشتقات در (a, b) پیوسته باشند، آنگاه f در (a, b) پیوسته خواهد بود.

برهان (اختیاری). فرض کنیم $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ نقطه‌ای در همسایگی داده شده N باشد. در این صورت،

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) \\ &= [f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b + \Delta y)] + [f(a, b + \Delta y) - f(a, b)] \\ &= [g(a + \Delta x) - g(a)] + [h(b + \Delta y) - h(b)], \end{aligned}$$

که در آن دو تابع کمکی یک متغیره

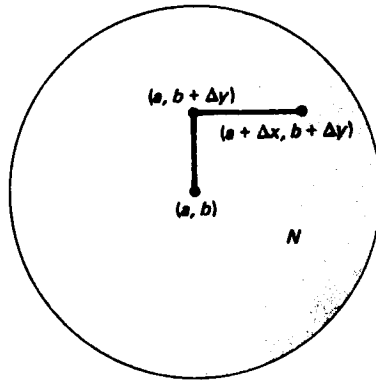
$$g(x) = f(x, b + \Delta y) \quad (a \leq x \leq a + \Delta x)$$

(Δy) در این بخش از برهان ثابت است (و

$$h(y) = f(a, y) \quad (b \leq y \leq b + \Delta y)$$

آمده‌اند. توابع g و h هر دو بر قلمروهایشان، که پاره‌خطهایی در همسایگی N اند، مشتقپذیر می‌باشند (ر. ک. شکل ۷). لذا، می‌توان قضیه مقدار میانگین (ر. ک. صفحه ۲۵۸) را بر هر دو تفاضل $g(a + \Delta x) - g(a)$ و $h(b + \Delta y) - h(b)$ اعمال کرد. در نتیجه، خواهیم داشت

$$\Delta f = \frac{dg(a + t \Delta x)}{dx} \Delta x + \frac{dh(b + u \Delta y)}{dy} \Delta y,$$



شکل ۷

که در آن \$t\$ و \$u\$ اعدادی بین 0 و 1 هستند؛ توجه کنید که \$a + t\Delta x\$ بین \$a\$ و \$a + \Delta x\$، و \$b + u\Delta y\$ بین \$b\$ و \$b + \Delta y\$ قرار دارند و این صرف نظر از علائم \$\Delta x\$ و \$\Delta y\$ است؛ در نتیجه، هر دو نقطه \$(a, b + u\Delta y)\$ و \$(a + t\Delta x, b + \Delta y)\$ در \$N\$ واقع می‌باشند. به علاوه،

$$\frac{dg(a + t\Delta x)}{dx} = f_x(a + t\Delta x, b + \Delta y),$$

$$\frac{dh(b + u\Delta y)}{dy} = f_y(a, b + u\Delta y),$$

و در نتیجه،

$$(10) \quad \Delta f = f_x(a + t\Delta x, b + \Delta y)\Delta x + f_y(a, b + u\Delta y)\Delta y.$$

رابطه (10) را می‌توان برحسب توابع

$$\begin{aligned} \alpha(\Delta x, \Delta y) &= f_x(a + t\Delta x, b + \Delta y) - f_x(a, b), \\ \beta(\Delta x, \Delta y) &= f_y(a, b + u\Delta y) - f_y(a, b) \end{aligned}$$

به شکل زیر نوشت:

$$(11) \quad \Delta f = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y.$$

اما، طبق فرض، \$f_x\$ و \$f_y\$ در \$(a, b)\$ پیوسته‌اند، و \$(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)\$ ایجاب می‌کند که \$(a, b) \to (a, b)\$ و \$(a + t\Delta x, b + \Delta y) \to (a, b)\$ و \$(a, b + u\Delta y) \to (a, b)\$ پس نتیجه می‌شود که وقتی \$(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)\$، \$\alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0\$ و \$\beta(\Delta x, \Delta y) \to 0\$، و این همراه با فرمول (11) مشتق‌پذیری \$f\$ در \$(a, b)\$ را ثابت خواهد کرد.

تقریب به وسیلهٔ دیفرانسیلها. درست مثل حالت توابع یک متغیره، می‌توان به کمک دیفرانسیلها محاسبات تقریبی انجام داد، به این ترتیب که تقریب $\Delta f \approx df$ در صورتی مناسب است که قدرمطلق نمو متغیرهای مستقل کوچک باشند.

مثال ۵. $\sqrt{(2.98)^2 + (4.03)^2}$ را تخمین بزنید.

حل. فرض کنیم $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ پس

$$\sqrt{(2.98)^2 + (4.03)^2} = f(3 + \Delta x, 4 + \Delta y),$$

که در آن $\Delta x = -0.02$ و $\Delta y = 0.03$ اما

$$\Delta f = f(3 + \Delta x, 4 + \Delta y) - f(3, 4) \approx df = f_x(3, 4)\Delta x + f_y(3, 4)\Delta y,$$

یا معادلاً

$$f(3 + \Delta x, 4 + \Delta y) \approx f(3, 4) + f_x(3, 4)\Delta x + f_y(3, 4)\Delta y.$$

در اینجا

$$f(3, 4) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

و

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

در نتیجه،

$$f_x(3, 4) = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5}, \quad f_y(3, 4) = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5}.$$

بنابراین، در مقایسه با مقدار دقیق 5.012115 تا شش رقم اعشار،

$$\sqrt{(2.98)^2 + (4.03)^2} \approx 5 + \frac{3}{5}(-0.02) + \frac{4}{5}(0.03) = 5.012.$$

مثال ۶. حجم یک ورقه فلزی به ضخامت 1-mm برای ساختن یک جعبه مکعب مستطیل بسته به طول 48 cm، عرض 36 cm، و ارتفاع 30 cm (ابعاد درونی) را تخمین بزنید.

حل. فرض کنیم x طول، y عرض، و z ارتفاع جعبه باشد. پس حجم جعبه مساوی است با $f(x, y, z) = xyz$ ، و حجم فلز لازم برای ساختن آن مساوی است با

$$\Delta f = f(48.2, 36.2, 30.2) - f(48, 36, 30)$$

$$\approx df = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z = yz \Delta x + xz \Delta y + xy \Delta z,$$

که در آن $x = 48$ ، $y = 36$ ، $z = 30$ ، و $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.2$. بنابراین ، در مقایسه با

$$\Delta f = 48.2(36.2)(30.2) - 48(36)(30) = 854.168 \text{ cm}^3$$

$$\Delta f \approx [36(30) + 48(30) + 48(36)](0.2) = 4248(0.2) = 849.6 \text{ cm}^3$$

با آنکه این تقریب به خوبی تقریب مثال قبل نیست ، خطای نسبی آن (ر.ک. مسئله ۳۱ ،

صفحه ۲۰۴) فقط $0.005 \approx 4.568/854.168$ می باشد .

مسائل

۱) نمو $\Delta f = f(a + \Delta x, y + \Delta y) - f(a, b)$ را در صورتی بیابید که $f(x, y) = \ln xy$ ، $(a, b) = (1, 1)$ و $\Delta x = -\frac{1}{2}$ ، $\Delta y = 3$.

نمو ۲)

$$\Delta f = f(a + \Delta x, h + \Delta y, c + \Delta z) - f(a, b, c)$$

را در صورتی بیابید که $f(x, y, z) = 2xy - 3xz + yz$ ، $(a, b, c) = (2, 1, 4)$ و $\Delta x = 3$ ،

$$\Delta z = 2$$
 ، $\Delta y = -1$

دیفرانسیل کل تابع داده شده را بیابید .

$$f(x, y) = x^2y - xy^3 + x^3y^2 \quad (۳)$$

$$f(x, y) = \tanh^{-1} \frac{x}{y} \quad (۵)$$

$$f(x, y) = \frac{xy}{x-y} \quad (۴)$$

$$g(s, t) = e^{st} \quad (۷)$$

$$f(x, y) = \operatorname{arccot} \frac{y}{x} \quad (۶)$$

$$f(x, y, z) = 2^x 3^y 4^z \quad (۹)$$

$$h(u, v) = \ln \sqrt{u^2 + v^4} \quad (۸)$$

$$f(x, y, z) = \frac{x+y}{y+z} \quad (۱۱)$$

$$f(x, y, z) = x^{yz^2} \quad (۱۰)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n \quad (۱۳)$$

$$g(s, t, u, v) = s^2 t^{-1} u^3 v^{-4} \quad (۱۲)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 10^{x_1 + x_2 + \dots + x_n} \quad (۱۴)$$

۱۵) با استفاده از دیفرانسیلها ، تغییر

$$f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$$

را به ازای تغییر (x, y) از $(1, 1)$ به $(0.96, 1.03)$ تخمین بزنید .

(۱۶) با استفاده از دیفرانسیلها ، تغییر

$$f(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

را به ازای تغییر (x, y, z) از $(2, 3, 4)$ به $(2.01, 3.02, 3.97)$ تخمین بزنید .

کمیات زیر را با استفاده از دیفرانسیلها تخمین بزنید .

$$\sqrt{(1.06)^2 + (1.97)^3} \cdot 1.8 \qquad (1.002)(2.003)^2(3.004)^3 \quad (17)$$

$$\sin 31^\circ \cos 58^\circ \cdot 2.0 \qquad (0.98)^{1.05} \cdot 1.9$$

$$\sqrt[3]{0.97} \sqrt{(1.04)^2} \cdot 2.2 \qquad \ln(\sqrt{1.04} + \sqrt[3]{1.08} - 1) \cdot 2.1$$

۲۳ تغییر طول یک قطر مستطیل به طول $x = 30 \text{ cm}$ و عرض $y = 16 \text{ cm}$ را در صورتی تخمین

بزنید که x به اندازه 3 mm افزایش و y به اندازه 1 mm کاهش یابد .

۲۴ حجم ورقه فلز لازم به ضخامت 0.05-in برای ساختن یک قوطی بسته به شعاع 4 in و

ارتفاع 12 in (ابعاد درونی) را تخمین بزنید .

۲۵ شعاع بالایی r_1 یک مخروط ناقص از 8 تا 8.3 cm افزایش یافته ، شعاع r_2 قاعده اش از 12

به 11.8 cm کاهش یافته ، و ارتفاع h آن از 10 cm به 10.1 cm افزایش می یابد . تغییر

حجم آن را تخمین بزنید .

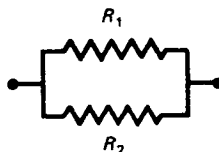
۲۶ اگر دو مقاومت R_1 و R_2 به طور موازی ، مثل شکل ۸ ، به هم وصل شوند ، مقاومت معادل

R آنها در فرمول زیر صدق می کند :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

فرض کنید 200 اهم $R_1 =$ و 300 اهم $R_2 =$ ، که خطا در سنجش آنها حداکثر 2 اهم است .

خطای ماکزیم در محاسبه مقدار R را تخمین بزنید .



شکل ۸

مستقیماً " از تعریف مشتق پذیری ثابت کنید تابع داده شده مشتق پذیر است ؛ یعنی ، اعداد A و B و توابع α و β را طوری بیابید که در فرمولهای (۵) و (۶) به ازای هر نقطه (a, b) در

صفحه xy صدق نمایند .

$$f(x, y) = (x + y)^2 \quad . ۲۸$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad . ۲۷$$

$$f(x, y) = e^{xy} \quad . ۳۰$$

$$f(x, y) = x^2y - xy^2 \quad . ۲۹$$

۳۱. نشان دهید تابع $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ در مبدا مشتقپذیر نیست .

۳۲. نشان دهید تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & |x| \leq |y| \\ -x, & |x| > |y| \end{cases} \text{ اگر}$$

در مبدا پیوسته بوده و مشتقات جزئی دارد، ولی در آن مشتقپذیر نیست. نشان دهید که این با قضیه ۲ سازگار است .

۳۳. فرمول مشابه (۵) را برای تابع سه متغیره $f(x, y, z)$ بنویسید .

عبارت مربوط به Δf در صورت مسئله ۲ داده شده است .

۳۴. نشان دهید تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{اگر } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{اگر } x = y = 0 \end{cases}$$

علی‌رغم اینکه مشتقات جزئی اش در مبدا پیوسته نیستند، در این نقطه مشتقپذیر است. لذا، شرایط مشتقپذیری در قضیه ۲ کافی اند، ولی لازم نیستند. (به بیان نادقیق، مشتقپذیری یک تابع چندمتغیره بیشتر از وجود مشتقات جزئی اول ولی کمتر از پیوستگی آنها را طالب است.)

۵.۱۳. قاعده زنجیره‌ای و مشتگیری ضمنی

حال مشابه‌های چندمتغیره قاعده زنجیره‌ای

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt}$$

را ارائه می‌دهیم، که با آنها می‌توان از توابع مرکب چند متغیره مشتق گرفت. برای سادگی با تابع از دو متغیر x و y که هر یک تابعی از متغیر مستقل t است شروع می‌کنیم. حالت کلیتر یک تابع با بیش از دو شناسه که هر یک تابعی از چند متغیر مستقل است، بعداً مطرح خواهد شد.

قضیه ۳ (قاعده زنجیره‌ای برای یک تابع دومتغیره). فرض کنیم $x = x(t)$ و $y = y(t)$

توابعی از یک متغیر بوده و هر دو در t مشتقپذیر باشند، و $f(x, y)$ تابعی از دو متغیر باشد که در $(x(t), y(t))$ مشتقپذیر است. در این صورت، تابع مرکب $F(t)$ ، که با $F(t) = f(x(t), y(t))$ تعریف شده است، در t مشتقپذیر بوده و مشتقش از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$(1) \quad F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t),$$

که در آن پریم مشتقگیری نسبت به t را نشان می‌دهد.

برهان (اختیاری). توجه کنید که در این صورت از قاعده زنجیره‌ای، اگرچه $f(x, y)$ تابعی دومتغیره است، ولی $F(t)$ تابعی از یک متغیر می‌باشد. چون $f(x, y)$ در $(x(t), y(t))$ مشتقپذیر است، بنا بر نتیجه صفحه ۱۲۴۵،

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= [f_x(x, y) + \alpha(\Delta x, \Delta y)] \Delta x + [f_y(x, y) + \beta(\Delta x, \Delta y)] \Delta y, \end{aligned}$$

که در آن وقتی $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ ، $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ و $\beta(\Delta x, \Delta y)$ هر دو به صفر نزدیک می‌شوند. تا بحال $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ و $\beta(\Delta x, \Delta y)$ فقط به ازای $(\Delta x, \Delta y) \neq (0, 0)$ تعریف شده بودند، ولی اینک قلمرو این توابع را با فرض $\alpha(0, 0) = 0$ و $\beta(0, 0) = 0$ وسعت بخشیده، بدین ترتیب هر دو تابع را در $(\Delta x, \Delta y) = (0, 0)$ پیوسته می‌سازیم.

حال Δf را بر نمو Δt متغیر مستقل تقسیم کرده، و با رفتن $\Delta t \rightarrow 0$ حد می‌گیریم.

این کار نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned} (2) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [f_x(x, y) + \alpha(\Delta x, \Delta y)] \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ &\quad + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [f_y(x, y) + \beta(\Delta x, \Delta y)] \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}, \end{aligned}$$

که در آن $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ و $\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$ نمو متغیرهای وابسته x و y می‌باشند. به علاوه، $x(t)$ و $y(t)$ در t مشتقپذیرند؛ و در نتیجه، در t پیوسته می‌باشند. بنا بر این، $\Delta t \rightarrow 0$ ایجاب می‌کند که $\Delta x \rightarrow 0$ و $\Delta y \rightarrow 0$ ؛ در نتیجه،

$$(3) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha(\Delta x, \Delta y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0$$

$$(3') \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \beta(\Delta x, \Delta y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

این امر که $\alpha(0, 0) = 0$ و $\beta(0, 0) = 0$ ، و در نتیجه $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ و $\beta(\Delta x, \Delta y)$ در $(0, 0) = (\Delta x, \Delta y)$ پیوسته‌اند، در این نتیجه‌گیری حیاتی است چرا که نمی‌توان $(\Delta x, \Delta y) \neq (0, 0)$ را تضمین نمود. (به یاد آورید که Δx و Δy دلخواه نیستند، وبه وسیله مقدار Δt معین می‌شوند.) پس از (۲)، (۳)، و (۳') معلوم می‌شود که

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta t} = f_x(x, y)x'(t) + f_y(x, y)y'(t),$$

یا معادلاً"

$$(۴) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) - f(x(t), y(t))}{\Delta t} = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t),$$

زیرا $x = x(t)$ و $y = y(t)$ و $y + \Delta y = y(t + \Delta t)$ ، $x + \Delta x = x(t + \Delta t)$. حال برهان قاعده زنجیره‌ای (۱) کامل است، زیرا حد (۴) چیزی جز مشتق تابع مرکب $F(t) = f(x(t), y(t))$ در t نمی‌باشد.

فرمول (۱) را می‌توان به طور فشرده‌تر زیر نوشت:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt},$$

که در آن شناسه‌های توابع حذف شده‌اند. حتی این رابطه را می‌توان ساده‌تر نوشت:

$$(۵) \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

بالاخره، چون f یک تابع دو متغیره است، نوشتن مشتق معمولی df/dt در سمت چپ (۵) یعنی هر شناسه f تابعی از یک متغیر، یعنی t ، گرفته شده است. با این فرض، می‌توان بدون علامت اضافی F ، که فقط برای ایجاد تمایز بین $f(x, y)$ و $f(x(t), y(t))$ وارد شده بود، کار کرد.

مثال ۱. dw/dt را در صورتی بیابید که $w = f(x, y) = x^2 + xy$ ، $x = e^t$ ، و $y = \sin t$.

حل. در اینجا متغیر وابسته دیگر w را وارد می‌کنیم، که قاعده زنجیره‌ای (۵) نسبت به آن شکل زیر را به خود می‌گیرد:

$$(۵') \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

چون $\partial w/\partial x = 2x + y$, $\partial w/\partial y = x$, $dx/dt = e^t$, $dy/dt = \cos t$ معلوم می شود که

$$\frac{dw}{dt} = (2x + y)e^t + x \cos t = 2e^{2t} + e^t \sin t + e^t \cos t.$$

همین جواب را می توان بدون کمک (۵') به دست آورد به این ترتیب که ابتدا $x = e^t$ و $y = \sin t$ را در $w = x^2 + xy$ گذارده، و سپس مشتقگیری می کنیم:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt} (e^{2t} + e^t \sin t) = 2e^{2t} + e^t \sin t + e^t \cos t.$$

از قضیه ۳ می توان قاعده زنجیره ای را برای حالت کلیتری که شناسه های $f(x, y)$ توابعی از چند متغیرند به آسانی به دست آورد. مثلاً، فرض کنیم $x = x(t, u)$ و $y = y(t, u)$ که در آنها x و y توابع مشتق پذیری از دو متغیر t و u می باشند. اگر u را ثابت بگیریم، x و y به توابعی از متغیر t تحویل می شوند، و می توان قضیه را به کار برده نتیجه گرفت که

$$(۶) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t},$$

که در آن هر سه مشتق معمولی (۵) مشتقات جزئی می باشند. به همین نحو، اگر t را ثابت بگیریم، x و y به توابعی از متغیر u تحویل شده، و به دست می آوریم

$$(۶') \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}.$$

در اینجا مجدداً می توان تابع مرکب F را وارد کرد که با $F(t, u) = f(x(t, u), y(t, u))$ تعریف می شود، ولی ساده تر است که دو تابع $f(x, y)$ و $f(x(t, u), y(t, u))$ را یکی بگیریم که بر حسب متغیرهای مختلف نوشته شده اند.

مثال ۲. $\partial f/\partial u$ و $\partial f/\partial t$ را در صورتی بیابید که $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ ، $x = tu$ ، و $y = t/u$

حل. چون

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u, \quad \frac{\partial x}{\partial u} = t, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{u}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{t}{u^2},$$

از (۶) و (۶') معلوم می‌شود که

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{2x}{x^2 + y^2} u + \frac{2y}{x^2 + y^2} \frac{1}{u} = \frac{2x^2}{t(x^2 + y^2)} + \frac{2y^2}{t(x^2 + y^2)} = \frac{2}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{2x}{x^2 + y^2} t + \frac{2y}{x^2 + y^2} \left(-\frac{t}{u^2}\right) = \frac{2}{t^2 u^2 + \frac{t^2}{u^2}} \left(t^2 u - \frac{t^2}{u^3}\right) = \frac{2(u^4 - 1)}{u(u^4 + 1)}$$

به عنوان تمرین، این مشتقات را به کمک (۶) و (۶') به این ترتیب حساب کنید که ابتدا $x = tu$ و $y = t/u$ را در $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ بگذارید.

تعمیم طبیعی فرمول (۵) به تابع $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ که شناساهاش به متغیر t وابسته‌اند به صورت زیر است:

$$(۷) \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$

و تقریباً "به همان صورت ثابت می‌شود (جزئیات را حذف می‌کنیم). به همین نحو، تعمیم (۶) و (۶') به تابع $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ که شناساهاش وابسته به m متغیر مستقل جدید t_1, t_2, \dots, t_m است خواهد بود:

$$(۸) \quad \frac{\partial f}{\partial t_j} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_j} \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

دو فرمول اخیر قواعد زنجیره‌ای "اصلی" اند که تمام صورتهای قبل به انضمام فرمول

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt}$$

حالات خاصی از آنها می‌باشند. به ویژگیهای مشترک (۷) و (۸) توجه کنید:

(یک) طرف راست فرمول شامل n جمله است، به ازای هر متغیر "میانمی" x_1, x_2, \dots, x_n یکی؛

(دو) هر یک از این جملات حاصل ضرب دو مشتق است که متغیر میانمی در مخرج عامل اول و در صورت عامل دوم ظاهر شده است؛

(سه) در تمام n جمله صورت عامل اول و مخرج عامل دوم نظیر صورت و مخرج مشتقی است که حساب می‌شود.

مثال ۳. dw/dt را در صورتی بیابید که $w = xyz$ ، $x = t^2$ ، $y = \ln t$ ، و $z = \sinh t$.

حل . بنا بر فرمول (۷) به ازای $n = 3$ و متغیر وابسته w به جای f ، داریم

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= (yz)(2t) + (xz)\left(\frac{1}{t}\right) + (xy)(\cosh t) \\ &= 2t \ln t \sinh t + t \sinh t + t^2 \ln t \cosh t. \end{aligned}$$

مثال زیر طرز استفاده از قاعده زنجیره‌ای برای توابع چند متغیره در حل مسائل میزانهای مرتبطرا نشان می‌دهد .

مثال ۴ . اگر شعاع r یک استوانه مستدیر قائم 15 cm بوده و به میزان 2 cm/sec افزایش یابد و ارتفاعش h که 24 cm/sec بوده و به میزان 3 cm/sec کاهش یابد ، حجم استوانه چگونه تغییر خواهد کرد؟ سرعت تغییر مساحت (به انضمام دو انتها) در همین لحظه چقدر است ؟

حل . هرگاه V حجم و A مساحت استوانه باشد ، آنگاه $V = \pi r^2 h$ و $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$. بنا براین ،

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h} \frac{dh}{dt} = 2\pi rh \frac{dr}{dt} + \pi r^2 \frac{dh}{dt}, \\ \frac{dA}{dt} &= \frac{\partial A}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial A}{\partial h} \frac{dh}{dt} = (2\pi h + 4\pi r) \frac{dr}{dt} + 2\pi r \frac{dh}{dt}. \end{aligned}$$

با گذاردن مقادیر $r = 15$ ، $h = 24$ ، $dr/dt = 2$ ، و $dh/dt = -3$ در این فرمولها ، معلوم می‌شود که در لحظه داده شده

$$\frac{dV}{dt} = (720\pi)(2) + (225\pi)(-3) = 765\pi \approx 2403.3 \text{ cm}^3/\text{sec},$$

$$\frac{dA}{dt} = (108\pi)(2) + (30\pi)(-3) = 126\pi \approx 395.8 \text{ cm}^2/\text{sec}.$$

مجدداً " مشتقگیری ضمنی . کاربرد دیگر قاعده زنجیره‌ای محاسبه مشتقات توابعی است که به‌طور ضمنی تعریف شده‌اند . مثلاً " ، فرض کنیم $F(x, y)$ یک تابع دو متغیره بوده ، و

$$(۹) \quad F(x, y) = 0$$

y را به صورت تابعی ضمنی از x تعریف کرده باشد. این یعنی تابعی چون $y = y(x)$ وجود دارد به طوری که به ازای هر x در بازه I ،

$$F(x, y(x)) = 0$$

پس ، با فرض مشتقپذیر بودن توابع $F(x, y)$ و $y(x)$ ، می توان قاعده زنجیره ای را به کار برده از (۹) نسبت به x مشتق گرفت :

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = F_x(x, y) \frac{dx}{dx} + F_y(x, y) \frac{dy}{dx} = F_x(x, y) + F_y(x, y) \frac{dy}{dx} = 0.$$

با حل این معادله نسبت به dy/dx ، به دست می آوریم

$$(10) \quad y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)},$$

مشروط بر اینکه $F_y(x, y) \neq 0$. این صورت پیچیده تری از تکنیک مشتقگیری ضمنی است که در بخش ۷.۲ معرفی شد .

مثال ۵. معادله

$$x^2 - xy + y^3 = 1$$

را که در مثال ۳ ، صفحه ۲۳۳ ، در نظر گرفته شد ، می توان با قرار دادن

$$F(x, y) = x^2 - xy + y^3 - 1$$

به شکل (۹) درآورد . در این صورت ،

$$F_x(x, y) = 2x - y, \quad F_y(x, y) = -x + 3y^2,$$

در نتیجه ، (۱۰) به صورت زیر درمی آید :

$$y' = \frac{2x - y}{x - 3y^2},$$

که همان فرمول (۷) ، صفحه ۲۳۳ ، می باشد .

از تکنیک مشتقگیری ضمنی می توان برای محاسبه مشتقات جزئی استفاده کرد . مثلاً "

اگر $F(x, y, z)$ یک تابع سه متغیره باشد ، معادله

$$(11) \quad F(x, y, z) = 0$$

z را به صورت تابعی ضمنی از x و y تعریف می کند ، به این معنی که تابعی چون $z = f(x, y)$

وجود دارد به طوری که بر مجموعه D بازی چون

$$F(x, y, z(x, y)) = 0$$

در این صورت ، با فرض مشتقپذیر بودن هر دو تابع $F(x, y, z)$ و $z(x, y)$ ، می توان از قاعده زنجیره ای استفاده کرد و از (۱۱) نسبت به x و y مشتق گرفت (شناسه ها به خاطر سادگی حذف شده اند) :

$$(۱۲) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = F_x \frac{\partial x}{\partial x} + F_y \frac{\partial y}{\partial x} + F_z \frac{\partial z}{\partial x} = F_x + F_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$(۱۲') \quad \frac{\partial F}{\partial y} = F_x \frac{\partial x}{\partial y} + F_y \frac{\partial y}{\partial y} + F_z \frac{\partial z}{\partial y} = F_y + F_z \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

در اینجا از این امر استفاده می کنیم که

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

با حل (۱۲) و (۱۲') نسبت به $\partial z/\partial x$ و $\partial z/\partial y$ ، به دست می آوریم

$$(۱۳) \quad z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)},$$

مشروط براینکه $F_z(x, y, z) \neq 0$.

مثال ۶ . به فرض آنکه

$$e^{-xy} - 3z + e^z = 0,$$

$\partial z/\partial x$ و $\partial z/\partial y$ را بیابید .

حل . این معادله به شکل (۱۱) است که در آن $F(x, y, z) = e^{-xy} - 3z + e^z$. لذا ،

$$F_x(x, y, z) = -ye^{-xy}, \quad F_y(x, y, z) = -xe^{-xy}, \quad F_z(x, y, z) = -3 + e^z,$$

و از (۱۳) نتیجه می شود که

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{ye^{-xy}}{e^z - 3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xe^{-xy}}{e^z - 3},$$

مشروط براینکه $z \neq \ln 3$. توجه کنید که این عبارات شامل خود تابع z اند که برایش فرمول صریحی وجود ندارد .

قضیه تابع ضمنی . برای آنکه مطلب را پیش ببریم ، به شرایطی نیاز داریم که وجود و مشتقپذیری یک تابع ضمنی را تضمین نمایند . این شرایط در قضیه تابع ضمنی ، که در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته ثابت شده است ، ذکر شده اند . این قضیه در حالتی

که تابع با معادله‌ای به شکل $F(x, y) = 0$ به‌طور ضمنی تعریف شده است چنین می‌گویید: فرض کنیم (x_0, y_0) چنان نقطه‌ای باشد که $F(x_0, y_0) = 0$ و $F(x, y)$ دارای مشتقات جزئی پیوسته $F_x(x, y)$ و $F_y(x, y)$ در همسایگی (x_0, y_0) باشد. همچنین، $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. در این صورت، تابع ضمنی منحصر به فردی مانند $y = y(x)$ وجود دارد به طوری که $y(x_0) = y_0$ و به ازای هر x در بازه‌ای چون $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ، $F(x, y(x)) = 0$ ، و به علاوه $y(x)$ بر I به‌طور پیوسته مشتقپذیر است که مشتقش y' از فرمول (۱۰) به دست می‌آید.

در قضیه^۲ تابع ضمنی می‌توان نقشهای x و y را باهم عوض کرد. به‌طور مشخص، هرگاه $F(x_0, y_0) = 0$ و $F(x, y)$ در همسایگی (x_0, y_0) مشتق جزئی پیوسته داشته و $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ آنگاه تابع ضمنی منحصر به فردی مانند $x = x(y)$ وجود دارد به طوری که $x(y_0) = x_0$ و به ازای هر y در بازه‌ای چون $J = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ ، $F(x(y), y) = 0$ ، و در این حالت $x(y)$ به‌طور پیوسته بر J مشتقپذیر با مشتق

$$(۱۰') \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{F_y(x, y)}{F_x(x, y)}$$

می‌باشد.

همچنین، مشابه قضیه^۲ تابع ضمنی برای تابع دو متغیره‌ای که با معادله^۳ $F(x, y, z) = 0$ به‌طور ضمنی تعریف شده است وجود دارد. مثلاً، فرض کنیم $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ و $F(x, y, z)$ در همسایگی (x_0, y_0, z_0) مشتق پیوسته داشته باشد. در این صورت، اگر $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ تابع ضمنی منحصر به فردی مانند $z = z(x, y)$ وجود دارد به طوری که $z(x_0, y_0) = z_0$ و به ازای هر (x, y) در همسایگی N از نقطه^۴ (x_0, y_0) ، $F(x, y, z(x, y)) = 0$ ، و $z(x, y)$ دارای مشتقات جزئی پیوسته^۵ z_x و z_y بر N است که با فرمولهای (۱۳) بیان می‌شوند.

مسائل

dw/dt را با قاعده^۶ زنجیره‌ای در صورتی بیابید که

۱. $w = x^2 - xy + y^2, x = t^3, y = t^4$ ✓

۲. $w = x^3 - xy^2, x = e^{-t}, y = \cos t$ ✓

۳. $w = y/x, x = \ln t, y = \tan t$ ✓

۴. $w = e^{xy} \ln(x + y), x = t^2, y = 2 - t^2$ ✓

۵. $w = \sqrt{r + s}, r = \cos t, s = \sin t$ ✓

۶. $w = u/(u - v), u = \cosh t, v = \sinh t$ ✓

۷. $w = \sin(x + y - z), x = \sin t, y = e^{t^2}, z = \ln t$ ✓

$$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, x = 1, y = t, z = t^2 \quad \text{۱۸}$$

$$w = xy + xz + yz, x = e^t, y = e^{-t}, z = \ln t \quad \text{۱۹}$$

$$w = \ln pqrs, p = \sin t, q = \cos t, r = e^t, s = e^{-t} \quad \text{۲۰}$$

در هر حالت، جواب را با بیان صریح w به صورت تابعی از t پیش از مشتقگیری امتحان نمایید.

با استفاده از قاعده زنجیره‌ای، $\partial w / \partial t$ و $\partial w / \partial u$ را در صورتی بیابید که

$$w = 1 - x^2 - y^2, x = t \cos u, y = t \sin u \quad \text{۲۱}$$

$$w = x/y, x = e^t \cos u, y = e^t \sin u \quad \text{۲۲}$$

$$w = e^{xy}, x = tu, y = 1/tu \quad \text{۲۳}$$

$$w = \tan xy, x = t^2 + u^2, y = t^2 - u^2 \quad \text{۲۴}$$

$$w = \arctan(x/y), x = t^2 - u^2, y = 2tu \quad \text{۲۵}$$

$$w = x/(x + y), x = t \cosh u, y = t \sinh u \quad \text{۲۶}$$

$$w = xyz, x = t + u, y = t - u, z = t^2 + u^2 \quad \text{۲۷}$$

$$w = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, x = t + u, y = t - u, z = 2\sqrt{tu} \quad \text{۲۸}$$

در هر حالت، جواب را با بیان صریح w به صورت تابعی از t و u پیش از مشتقگیری امتحان کنید.

با استفاده از قاعده زنجیره‌ای، $\partial u / \partial x$ ، $\partial u / \partial y$ ، $\partial u / \partial z$ را در صورتی بیابید که

$$u = \sin rs, r = x^2 + yz, s = x^2 - yz \quad \text{۲۹}$$

$$u = \tanh^{-1}(r/s), r = x \sin yz, s = x \cos yz \quad \text{۳۰}$$

$$u = r^2 + s^2 + t^2, r = x + y + z, s = x - y + z, t = x - y - z \quad \text{۳۱}$$

$$u = \ln(r + s + t), r = xy, s = xz, t = yz \quad \text{۳۲}$$

در هر حالت، جواب را با بیان صریح u به صورت تابعی از x ، y ، و z پیش از مشتقگیری امتحان کنید.

۲۳. فرض کنید $u = u(r, s, t)$ ، که در آن $r = x - y$ ، $s = y - z$ ، $t = z - x$ و u یک تابع مشتق پذیر باشد. نشان دهید که

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

۲۴. فرض کنید $u = xf(x + y) + yg(x + y)$ ، که در آن f و g توابع دلخواهی از یک متغیر با مشتقات دوم " f " و " g " اند. نشان دهید که

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

فرض کنید $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ تبدیل از مختصات قطبی به قائم بوده، و $u = u(x, y)$ یک تابع دومتغیره با مشتقات جزئی دوم پیوسته باشد. نشان دهید که

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta, \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r} \quad . ۲۵$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta, \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r} \quad . ۲۶$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 \quad . ۲۷$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad . ۲۸$$

۲۹. گوییم تابع دومتغیره $f(x, y)$ با قلمرو D همگن از درجه n است اگر به ازای هر (x, y) در D و هر $t > 0$ ،

$$(یک) \quad f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

در اینجا n می تواند هر عدد حقیقی باشد، و فرض این است که هرگاه (x, y) متعلق به D باشد، آنگاه هر نقطه (tx, ty) که $t > 0$ نیز چنین است. مثلاً، تابع $f(x, y) = x^2 \ln(x/y) - xy$ تعریف شده بر ربعهای اول و سوم، همگن از درجه ۲ است. نشان دهید هرگاه $f(x, y)$ همگن از درجه n و در هر نقطه از قلمرو خود مشتقپذیر باشد، آنگاه

$$(دو) \quad xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y),$$

که به قضیهٔ اویلر در باب توابع همگن معروف است.

۳۰. تحقیق کنید که تابع $f(x, y) = x^2 \ln(x/y) - xy$ در قضیهٔ اویلر (دو) به ازای $n = 2$ صدق می کند.

۳۱. نشان دهید هرگاه تابع مشتقپذیر $f(x, y)$ همگن از درجه n باشد، آنگاه مشتقات جزئی آن $f_x(x, y)$ و $f_y(x, y)$ همگن از درجه $n - 1$ می باشند.

آیا تابع داده شده همگن است، و در صورت بودن درجه اش چیست؟

$$f(x, y) = 1/(x^2 + y^2) \quad . ۳۳$$

$$f(x, y) = \sqrt{x} - \sqrt{y} \quad . ۳۲$$

$$f(x, y) = x^{5/3}y^{-2/3} + x^{2/3}y^{-5/3} \quad . ۳۵$$

$$f(x, y) = 1 + \sin(x/y) \quad . ۳۴$$

اگر تابع همگن بود، صدق آن در قضیهٔ اویلر را تحقیق نمایید.

۳۶. با استفاده از قاعدهٔ زنجیره ای، نشان دهید که فرمول

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

برای دیفرانسیل کل تابع f از دو متغیر x و y ، حتی اگر x و y خود نوابعی از متغیرهای مستقل جدید t و u باشند، برقرار است.

۳۷. دو کشتی A و B به بندر نزدیک می‌شوند. کشتی A با سرعت 25 گره به غرب و کشتی B با سرعت 20 گره به جنوب روان است. در لحظه‌ای معین، A در فاصله 3 میل (دریایی) و B در فاصله 4 میل از بندر قرار دارند. سرعت کاهش فاصله بین دو کشتی در این لحظه چقدر است؟

۳۸. شعاع r یک مخروط مستدیر قائم 18 cm بوده و به میزان 1.5 cm/sec افزایش می‌یابد، ولی ارتفاع h آن 30 cm بوده و به میزان 2 cm/sec کاهش می‌یابد. سرعت تغییر حجم آن چقدر است؟

۳۹. میزان افزایش فشار p یک مل از یک گاز کامل را در صورتی بیابید که حجمش V مساوی 150 cm^3 بوده و به میزان $5 \text{ cm}^3/\text{min}$ کاهش یابد، حال آنکه دمای مطلق T آن 300° بوده و به میزان $2^\circ/\text{min}$ افزایش یابد. از قانون گاز کامل $pV = RT$ (ر. ک. مثال ۳، صفحه ۱۲۳۵) به ازای $R = 82.07 \text{ cm}^3 \text{ atm}/^\circ\text{K}$ استفاده کنید، فشار به اتمسفر (atm) و دما به درجه کلوین ($^\circ\text{K}$) است.

۴۰. طول l یک جعبه مستطیلی شش‌وجهی 15 in بوده و به میزان 3 in/sec افزایش می‌یابد، عرض w برابر 10 in بوده و به میزان 0.5 in/sec کاهش می‌یابد، و ارتفاع h آن مساوی 8 in بوده و به میزان 2 in/sec افزایش می‌یابد. میزان تغییر حجم جعبه چقدر است؟ میزان تغییر مساحت جعبه در همین لحظه چقدر خواهد بود؟

با استفاده از مشتقگیری ضمنی همانند در فرمول (۱۰)، $y' = dy/dx$ را در صورتی بیابید که x و y در معادله داده شده صدق نمایند:

$$x^2y - xy^2 + 2y^3 = 4 \quad (۴۲) \quad x^4 + y^2 - 8x + 5y = 1 \quad (۴۱)$$

$$xe^{2y} - ye^{3x} = 0 \quad (۴۳) \quad y^6 - y - x^3 = 0 \quad (۴۲)$$

$$\cos(x - y) = xy \quad (۴۶) \quad x^2 + 2 \sin xy + y^3 = 0 \quad (۴۵)$$

$$x^y = y^x \quad (۴۸) \quad xy - \tan y = 0 \quad (۴۷)$$

$$\ln(x + y) = y \quad (۵۰) \quad xy^2 = e^y \quad (۴۹)$$

با استفاده از مشتقگیری ضمنی مثل فرمولهای (۱۳)، $z_x = \partial z / \partial x$ و $z_y = \partial z / \partial y$ را در صورتی بیابید که x ، y ، z در معادله داده شده صدق کنند.

$$\sin xz + \cos yz = 0 \quad (۵۲) \quad x^2 + z^2 + xz - x^3y = 2 \quad (۵۱)$$

$$\ln(xy + xz + yz) = 0 \quad (۵۴) \quad e^x - xyz = 0 \quad (۵۳)$$

۵۵. فرض کنید $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ و z_x و z_y را در نقطه $(2, -3, 6)$ با مشتقگیری صریح و

ضمنی حساب کنید .

۵۶ . به فرض آنکه $2x^2 + y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ ، $\partial^2 z / \partial x^2$ ، $\partial^2 z / \partial x \partial y$ ، $\partial^2 z / \partial y^2$ را در نقطه $(-2, 1, 1)$ بیابید .

۵۷ . dz را در صورتی بیابید که $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z = 1$.

۵۸ . با فرض اینکه معادله $F(x, y, z) = 0$ هر سه متغیر x ، y ، z را به صورت تابعی ضمنی از دوتای دیگر تعریف می کند ، نشان دهید در هر نقطه که مشتقات جزئی F_x ، F_y ، F_z و همه ناصفرند ،

$$\frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

این امر چه رابطه‌ای با مثال ۳ ، صفحه ۱۲۳۵ ، دارد ؟

۵۹ . صورت دوبعدی قضیه مقدار میانگین را ثابت کنید . فرض کنید $f(x, y)$ در همسایگی N نقطه $A = (a, b)$ مشتقپذیر بوده ، و نقطه $B = (a + \Delta x, b + \Delta y)$ متعلق به N باشد . در این صورت ، نقطه‌ای مانند (α, β) از پاره‌خط واصل بین A و B (متمایز از نقاط انتهایی پاره‌خط) وجود دارد به طوری که

$$\Delta f = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) = f_x(\alpha, \beta) \Delta x + f_y(\alpha, \beta) \Delta y. \quad (\text{سه})$$

۶۰ . نقطه (α, β) صادق در (سه) را در صورتی بیابید که $f(x, y) = x^2 + xy$ ، $(a, b) = (0, 0)$ و $(\Delta x, \Delta y) = (2, 3)$.

۶۱ . دهید هرگاه تابع f بر $[a, b]$ پیوسته بوده و $a \leq u(x) \leq v(x) \leq b$ ، آنگاه

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = f(v(x)) \frac{dv(x)}{dx} - f(u(x)) \frac{du(x)}{dx},$$

مشروط بر اینکه u و v توابع مشتقپذیری باشند .

۶۲ . $\frac{d}{dx} \int_x^{x^3} \ln t dt$ را مستقیماً " و به کمک مسئله قبل حساب کنید .

۶۳ . در مسئله ۵۱ ، صفحه ۸۲۳ ، نشان داده‌ایم که اگر توابع $f(x, y)$ و $\partial f(x, y) / \partial x$ بر ناحیه مستطیلی $\{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ پیوسته باشند ،

$$\frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy \quad (a \leq x \leq b).$$

با فرض برقراری این فرمول ، نشان دهید که

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy$$

$$= \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy + f(x, v(x)) \frac{dv}{dx} - f(x, u(x)) \frac{du}{dx},$$

که در آن u و v همان معانی داشته در مسئله ۶۱ را دارند.

۶۴. $\frac{d}{dx} \int_x^{x^2} \frac{\sin xy}{y} dy$ را با استفاده از مسئله ۶۳ حساب کنید. چه چیز جلو محاسبه

مستقیم این مشتق را می‌گیرد؟

۶۵. فرض کنید $x = x(t, u)$ و $y = y(t, u)$ توابعی از دو متغیر باشند که هر دو در (t, u) مشتقپذیر، و $f(x, y)$ یک تابع دو متغیره باشد که در $(x(t, u), y(t, u))$ مشتقپذیر است. در این صورت، همانطور که در بحث بعد از مثال ۱ دیدیم، تابع مرکب $f(x(t, u), y(t, u))$ در (t, u) مشتقات جزئی دارد که با فرمولهای (۶) و (۶) داده شده‌اند. قدمی فراتر رفته و نشان دهید که $f(x(t, u), y(t, u))$ در واقع در (t, u) مشتقپذیر است.

۱۳. ۶ صفحه مماس بر یک سطح

حال طرز تعریف صفحه مماس بر سطح S را نشان می‌دهیم. فرض کنیم S نمودار معادله

$$F(x, y, z) = 0,$$

نقطه ثابتی از S ، و منحنی C به معادلات پارامتری

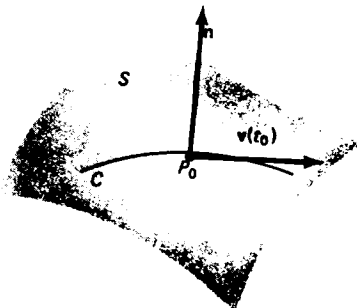
$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (\alpha < t < \beta)$$

یک منحنی بر S مار بر P_0 مطابق شکل ۹ باشد. فرض کنیم C هموار باشد، بدین معنی که

توابع $x(t)$ ، $y(t)$ ، و $z(t)$ بر (α, β) به طور پیوسته مشتقپذیر بوده و در شرط

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 \neq 0$$

صدق نمایند، که در آن طبق معمول پریم یعنی مشتگیری نسبت به شناسه t .



شکل ۹

فرض کنیم t_0 مقدار پارامتر t نظیر به نقطه P_0 باشد، در نتیجه $P_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ و $F(x, y, z)$ در P_0 مشتقپذیر یا مشتقاتی جزئی باشد که همه با هم صفر نیستند. چون C بر S است، داریم

$$(1) \quad F(x(t), y(t), z(t)) = 0.$$

از (۱) با استفاده از قاعده زنجیره‌ای نسبت به t مشتق گرفته و سپس قرار می‌دهیم $t = t_0$ تا به دست آید

$$F_x(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) = 0.$$

این فرمول می‌گوید که حاصل ضرب نقطه‌ای بردارهای

$$(2) \quad x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\mathbf{j} + z'(t_0)\mathbf{k}$$

و

$$(3) \quad \mathbf{n} = F_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + F_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + F_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k}$$

مساوی صفر است؛ در نتیجه، این بردارها برهم عمود می‌باشند. اما (۲) همان بردار سرعت $\mathbf{v}(t_0)$ در P_0 نقطه متغیر P است که در امتداد منحنی C حرکت می‌کند و این بردار، همانطور که در صفحه ۱۱۷۹ دیدیم، بر C در P_0 مماس است. لذا، به ازای هر منحنی (هموار) C بر S مار بر P_0 ، \mathbf{n} بر $\mathbf{v}(t_0)$ عمود می‌باشد. پس نتیجه می‌شود که صفحه مار بر P_0 با قائم \mathbf{n} شامل خط مماس بر هر منحنی C بر S است که از P_0 می‌گذرد. این صفحه، که نمودار معادله

$$(4) \quad F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

است، صفحه مماس بر سطح S در نقطه P_0 تعریف می‌شود.

خط قائم بر یک سطح بردار \mathbf{n} تعریف شده با (۳) را قائم به سطح S در P_0 می‌نامیم. همچنین، خط مار بر P_0 و موازی \mathbf{n} ، یعنی عمود بر صفحه مماس بر S در P_0 ، را خط قائم به S در P_0 می‌خوانیم. لذا، خط قائم به سطح S در P_0 به معادلات تقارنی زیر می‌باشد:

$$(5) \quad \frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

در شکل ۱۰، تعبیر هندسی صفحه مماس و خط قائم به سطح S توضیح داده شده است.

۱. لازم به تذکر است که هر دو بردار $\mathbf{v}(t_0)$ و \mathbf{n} ناصفرند، و این به خاطر فرضیهایی است که در باب مشتقات x', y', z' و F_x, F_y, F_z شده است.



شکل ۱۰

مثال ۱. صفحه مماس و خط قائم به بیضی گون

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

در نقطه $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ را بیابید.

حل. در اینجا

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

$$F_x(x, y, z) = \frac{2x}{a^2}, \quad F_y(x, y, z) = \frac{2y}{b^2}, \quad F_z(x, y, z) = \frac{2z}{c^2},$$

و در نتیجه، طبق (۴)، صفحه مماس در P_0 به معادله

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$$

یا

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}$$

است، که به معادله

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1$$

ساده می شود، زیرا P_0 بر بیضی گون قرار دارد. این تعمیم سه بعدی معادله (۱۱)، صفحه

۹۵۱، است. به علاوه، طبق (۵)، خط قائم بیضی‌گون در P_0 به معادلات تقارنی

$$\frac{x - x_0}{x_0/a^2} = \frac{y - y_0}{y_0/b^2} = \frac{z - z_0}{z_0/c^2}$$

می‌باشد.

فرض کنیم سطح S نمودار تابع

$$z = f(x, y)$$

باشد، که در نقطه (x_0, y_0) مشتق‌پذیر است. این معادله به شکل $F(x, y, z) = 0$ است، که در آن

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z,$$

در نتیجه،

$$F_x(x, y, z) = f_x(x, y), \quad F_y(x, y, z) = f_y(x, y), \quad F_z(x, y, z) = -1.$$

لذا، در حالت فعلی، معادلات (۴) و (۵) صفحه مماس و خط قائم در $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ به معادلات

$$(۴') \quad f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

و

$$(۵') \quad \frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

تحویل می‌شوند، که در آنها $z_0 = f(x_0, y_0)$. توجه کنید که معادله (۴') را می‌توان به شکل زیر نیز نوشت:

$$(۶) \quad z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

که از آن معلوم می‌شود که نمودار $z = f(x, y)$ نمی‌تواند صفحه مماسی موازی محور z داشته باشد (چرا نه؟).

مثال ۲. صفحه مماس و خط قائم بر سطح $z = f(x, y) = xy$ در نقطه $(2, -2, -4)$ بیابید.

حل. چون $f_x(x, y) = y$ و $f_y(x, y) = x$ ، داریم $f_x(2, -2) = -2$ و $f_y(2, -2) = 2$. پس از (۴') نتیجه می‌شود که صفحه مماس در $(2, -2, -4)$ مساوی است با $-2(x - 2) + 2(y + 2) - (z + 4) = 0$ یا معادلاً $2x - 2y + z - 4 = 0$ ، و از (۵') معلوم می‌شود که خط

قائم در $(-4, -2, 2)$ به معادلات تقارنی زیر است:

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+4}{-1}$$

تقریب صفحه مماس. حال که صفحه مماس تعریف شده است، می توان مشتقگیری تابع دو متغیره $z = f(x, y)$ را به طور ساده تعبیر هندسی کرد. از نتیجه صفحه 1245 به یاد آورید که هرگاه $f(x, y)$ در (x_0, y_0) مشتقپذیر باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \Delta y, \end{aligned}$$

که در آن $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ و $\beta(\Delta x, \Delta y)$ با رفتن $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ به صفر نزدیک می شوند. به بیان معادل، با نوشتن $\Delta x = x - x_0$ و $\Delta y = y - y_0$ ، داریم

$$(7) \quad \begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &\quad + \alpha^*(x, y)(x - x_0) + \beta^*(x, y)(y - y_0), \end{aligned}$$

که در آن $\alpha^*(x, y) = \alpha(x - x_0, y - y_0)$ و $\beta^*(x, y) = \beta(x - x_0, y - y_0)$ با رفتن $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ به صفر نزدیک می شوند. از مقایسه معادلات (۶) و (۷) معلوم می شود که مشتقگیری $f(x, y)$ در (x_0, y_0) یعنی نمودار $f(x, y)$ در (x_0, y_0) صفحه مماس دارد و در مجاورت (x_0, y_0) با این صفحه مماس تقریب می شود و خطای حاصل عبارت است از $e(x, y) = \alpha^*(x, y)(x - x_0) + \beta^*(x, y)(y - y_0)$ که در آن $e(x, y)$ در نامساوی زیر صدق می کند:

$$\left| \frac{e(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \right| \leq |\alpha^*(x, y)| + |\beta^*(x, y)|$$

(چرا؟)؛ و در نتیجه، وقتی $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ ، از فاصله بین نقاط (x, y) و (x_0, y_0) "سریعتر" به صفر نزدیک می شود. همچنین، می توان نشان داد که تقریب نمودار $f(x, y)$ در مجاورت (x_0, y_0) به وسیله صفحه مماس در (x_0, y_0) از هر صفحه دیگر مار بر (x_0, y_0) بهتر است. به تشابه کامل بین این تقریب صفحه مماس و تقریب خط مماس نظیر برای یک تابع مشتقپذیر از یک متغیر توجه نمایید. بخصوص، به مسائل ۲۹ و ۳۰، صفحه ۲۰۴، مجدداً نگاه کنید.

در بخش ۴.۱۳، از دیفرانسیلها برای تقریب نموهای توابع n متغیره استفاده کردیم. این در حالت $n = 2$ معادل استفاده از تقریب صفحه مماس، و در حالت $n > 2$ معادل تعمیم به ابعاد بالاتر آن می باشد.

مسائل

معادلات صفحه مماس و خط قائم نمودار معادله داده شده را در نقطه ذکر شده بنویسید . P

۱) $y^2 = 4x, P = (1, 2, 6)$

۲) $z = 2x^2 + y^2, P = (1, -1, 3)$

۳) $z = 2x^2 - 3y^2, P = (-2, 1, 5)$

۴) $x^2 + y^2 - z^2 = -1, P = (2, -2, 3)$

۵) $x^2 - 3xy + y^2 + xz - z^2 = 3, P = (1, -1, -1)$

۶) $x^3 + y^3 + z^3 = 1, P = (-2, 1, 2)$

۷) $xyz = a^3, P = (x_0, y_0, z_0)$

۸) $z^2 = xy, P = (x_0, y_0, z_0)$

۹) $z = \ln(x^2 + y^2), P = (e, 0, 2)$

۱۰) $Ax + By + Cz + D = 0, P = (x_0, y_0, z_0)$

۱۱) $2^{x/e} + 2^{y/e} = 16, P = (3, 3, 1)$

۱۲) $z = 2 \sin x \cos y, P = (\pi/4, \pi/4, 1)$

۱۳) در چه نقطه از مخروط $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ مماس و خط قائم تعریف نشده اند؟ پاسخ خود را توضیح دهید .

۱۴) معادلات صفحه مماس و خط قائم به سطح درجه دو $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ را در نقطه $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ نوشته ، و نشان دهید این معادلات نتایج مثال ۱ را در بر دارند .

۱۵) بیضی گون $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 66$ دو صفحه مماس موازی صفحه $x + y + z = 1$ دارد . این صفحات و نقاط تماس آنها را بیابید .

۱۶) نشان دهید که مجموع قطعهای (مختصات نقاط اشتراک با محورهای مختصات) هر صفحه مماس بر سطح $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ ($a > 0$) مساوی a است .

۱۷) نشان دهید مجموع مربعات قطعهای هر صفحه مماس بر سطح $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ مساوی a^2 است .

۱۸) نشان دهید هر چهاروجهی محدود به صفحات مختصات و یک صفحه مماس بر سطح $xyz = a^3$ ($a > 0$) حجم ثابت $\frac{3}{2}a^3$ را دارد .

۱۹) نشان دهید که کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ و استوانه $xyz = 1$ با هم مماسند ؛ یعنی ، در نقطه $(1, 1, 0)$ صفحه مماس یکسانی دارند . این صفحه مماس مشترک

چیست؟

۲۰. نشان دهید که سطوح $z = xy - y^2 + 8y - 5$ و $z = e^{2x+y+4}$ در نقطه $(-3, 2, 1)$ بر هم مماسند. صفحه مماس مشترک چیست؟
۲۱. صفحه مار بر نقطه $(0, 0, 1)$ مماس بر سطح $0 = x^2 - y^2 + 3z$ و موازی خط

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$$

را بیابید.

۲۲. از نظر هندسی واضح است که تمام خطوط قائم به سطح دوار $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ محور z را، که محور دوران است، قطع می‌کنند. این مطلب را به‌طور تحلیلی ثابت کنید. برای صفحه مماس و خط قائم در نقطه (p_0, y_0, z_0) از نمودار تابع داده شده معادلاتی شبیه (۴) و (۵) بنویسید.

$$x = g(y, z) \quad ۲۳$$

$$y = h(x, z) \quad ۲۴$$

۲۵. نظریه مذکور در این بخش، علاوه بر سطوح، در مورد منحنیهای مسطح نیز به کار می‌رود: فرض کنید منحنی C نمودار معادله $F(x, y) = 0$ بوده، و مشتقات جزئی پیوسته داشته باشد که هیچگاه همزمان صفر نباشند $(F_x^2 + F_y^2 \neq 0)$. نشان دهید که خط مماس بر C در $P_0 = (x_0, y_0)$ معادله‌ای به شکل زیر دارد:

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \quad (\text{یک})$$

در این صورت، از مسئله ۵۳، صفحه ۷۲، معلوم می‌شود که بردار $(F_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + F_y(x_0, y_0)\mathbf{j})$ به این خط، و در نتیجه به منحنی C در نقطه P_0 ، قائم است.

۲۶. فرض کنید منحنی C همان منحنی مسئله قبل باشد. نشان دهید که خط قائم به C در $P_0 = (x_0, y_0)$ معادله‌ای به شکل زیر دارد:

$$F_y(x_0, y_0)(x - x_0) - F_x(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \quad (\text{دو})$$

با استفاده از فرمولهای (یک) و (دو)، خطوط مماس و قائم به نمودار معادله داده شده در نقطه ذکر شده P را بیابید.

$$x^3y - x^2y^2 + xy^3 = 6, P = (1, 2) \quad ۲۷$$

$$e^{x+y} - 2x^2 - xy = 0, P = (-1, 1) \quad ۲۸$$

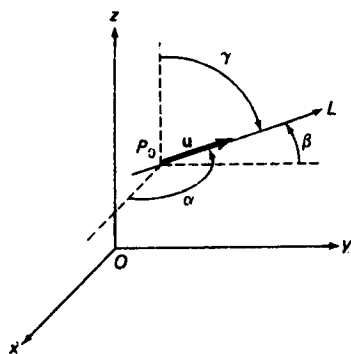
$$\sin xy + \ln y = 0, P = (0, 1) \quad ۲۹$$

$$x^y = y^x, P = (1, 1) \quad ۳۰$$

۷.۱۳ مشتق جهتی و گرادیان

مشتقات جزئی تابع $f(P) = f(x, y, z)$ میزانهای تغییر f در امتداد سه محور مختصات را به ما می‌دهند. حال میزان تغییر f را در امتداد خط دلخواهی در فضا حساب می‌کنیم. فرض کنیم f در همسایگی نقطه $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ تعریف شده باشد، و L خط جهتداری مار بر P_0 با زوایای هادی α, β, γ باشد (ر.ک. شکل ۱۱). در این صورت، جهت L همان جهت بردار یکه $\mathbf{u} = (\cos \alpha)\mathbf{i} + (\cos \beta)\mathbf{j} + (\cos \gamma)\mathbf{k}$ بوده، و L به معادلات پارامتری

$$(1) \quad x = x_0 + t \cos \alpha, \quad y = y_0 + t \cos \beta, \quad z = z_0 + t \cos \gamma$$



شکل ۱۱

می‌باشد. منظور از مشتق جهتی f در P_0 در جهت L یا \mathbf{u} ، که با

$$D_{\mathbf{u}}f(P_0) = D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0)$$

نموده می‌شود، یعنی حد

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t},$$

مشروط بر آنکه این حد موجود و متناهی باشد. توجه کنید که هرگاه L محور x باشد، آنگاه $\alpha = 0, \beta = \gamma = \pi/2$ ، و (۲) به صورت زیر تحویل می‌شود:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{t},$$

که همان مشتق جزئی f نسبت به x در P_0 است. به همین نحو، اگر L محور y یا z باشد، (۲) به مشتق جزئی f نسبت به y یا z در P_0 تحویل می‌شود.

قضیهٔ زیر طرز بیان مشتق جهتی تابع f در هر جهت را برحسب مشتقات جزئی f

نشان می‌دهد.

قضیه ۴ (مشتق جهتی برحسب مشتقات جزئی) . هرگاه $f(P) = f(x, y, z)$ در $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ مشتقپذیر بوده و خط جهتدار L یا بردار یکه نظیر \mathbf{i} دارای کسینوسهای هادی $\cos \alpha$ ، $\cos \beta$ و $\cos \gamma$ باشد ، آنگاه مشتق جهتی f در P_0 در جهت L یا \mathbf{i} از فرمول زیر به دست می آید :

$$(۳) \quad D_{\mathbf{i}} f(P_0) = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f(P_0)}{\partial z} \cos \gamma.$$

برهان . فرض کنیم

$$F(t) = f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma),$$

در نتیجه ، بخصوص $F(0) = f(x_0, y_0, z_0)$. پس $F(t)$ در $t = 0$ مشتقپذیر است ، و

$$D_{\mathbf{i}} f(P_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \frac{dF(0)}{dt},$$

که در آن حد طریقه فشرده نوشتن (۲) می باشد . اما ، طبق قاعده زنجیره ای ،

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

و لذا ، پس از مشتگیری از فرمولهای (۱) نسبت به t ،

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma.$$

حال فرمول (۳) از محاسبه dF/dt در $t = 0$ و مشتقات جزئی f در نقطه نظیر $P = P_0$ به دست می آید .

بردار گرادیان . با معرفی بردار

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k},$$

به نام گرادیان f ، که مولفه های مشتقات جزئی f اند ، می توان بصیرت بیشتری از ساختار فرمول (۳) به دست آورد . این بردار را با ∇f نیز نشان می دهند ، که در آن علامت ∇ ، یعنی وارون دلتای بزرگ ، " دل " تلفظ می شود . علامت ∇ (یا grad) خود عملگر

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

را نشان می دهد ، که گرادیان تابع مشتقپذیر سه متغیره ای که پس از آن می آید را به ما

می‌دهد. لذا،

$$\text{grad } f = \nabla f = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}.$$

حال فرمول (۳) مساوی حاصل ضرب نقطه‌ای گرادیان f و بردار یکه^۴

$$\mathbf{u} = (\cos \alpha) \mathbf{i} + (\cos \beta) \mathbf{j} + (\cos \gamma) \mathbf{k}$$

می‌باشد:

$$(۴) \quad D_{\mathbf{a}} f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \mathbf{u}.$$

اگر بردار ناصفر \mathbf{a} یک بردار یکه نباشد، مشتق جهتی f در P_0 در جهت \mathbf{a} مساوی

مشتق جهتی در جهت بردار یکه^۴ \mathbf{u} با همان جهت \mathbf{a} تعریف می‌شود. یعنی، به صورت

$$D_{\mathbf{a}} f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|},$$

یا معادلاً

$$D_{\mathbf{a}} f(P_0) = \text{comp}_{\mathbf{a}} \nabla f(P_0),$$

که در آن $\text{comp}_{\mathbf{a}} \nabla f(P_0)$ مولفه^۴ بردار گرادیان $\nabla f(P_0)$ در امتداد \mathbf{a} می‌باشد (ر. ک. صفحه^۴

۱۱۴۴).

مثال ۱. مشتق جهتی تابع

$$f(P) = f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

را در نقطه^۴ $P_0 = (1, 2, 3)$ و در جهت بردار $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ بیابید.

حل. با محاسبه^۴ گرادیان f ، به دست می‌آوریم

$$\nabla f(P) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k},$$

در نتیجه،

$$\nabla f(P_0) = \nabla f(1, 2, 3) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}.$$

لذا، مشتق جهتی f در P_0 در جهت \mathbf{a} عبارت است از

$$\begin{aligned} \text{comp}_{\mathbf{a}} \nabla f(P_0) &= (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) \cdot \frac{-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{|-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}|} \\ &= \frac{2(-2) + 4(1) - 6(-2)}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{12}{\sqrt{9}} = 4. \end{aligned}$$

حال از (۴) برای به دست آوردن چند خاصیت مهم مشتقات جهتی استفاده می‌کنیم:
 (یک) هرگاه $\nabla f(P_0) = 0$ ، آنگاه به ازای هر بردار یکه \mathbf{u} ، $D_{\mathbf{u}}f(P_0) = 0 \cdot \mathbf{u} = 0$ ، لذا مشتق جهتی f در P_0 در هر جهت صفر است اگر $\nabla f(P_0) = 0$.
 (دو) هرگاه $\nabla f(P_0) \neq 0$ ، آنگاه

$$(۵) \quad D_{\mathbf{u}}f(P_0) = |\nabla f(P_0)| |\mathbf{u}| \cos \theta = |\nabla f(P_0)| \cos \theta,$$

که در آن θ در آن $0 \leq \theta \leq \pi$ زاویه بین بردارهای $\nabla f(P_0)$ و \mathbf{u} است. ولی $\cos \theta$ بیشترین مقدارش ۱ (به ازای $\theta = 0$) است. پس اگر $\nabla f(P_0) \neq 0$ ، مشتق جهتی در P_0 با بیشترین مقدار مشتق در جهت $\nabla f(P_0)$ است، و این بیشترین مقدار $|\nabla f(P_0)|$ ، یعنی اندازه بردار گرادیان $\nabla f(P_0)$ ، می‌باشد.

(سه) مجدداً "فرض کنیم $\nabla f(P_0) \neq 0$. چون $\cos \theta$ کمترین مقدار خود -1 را به ازای $\theta = \pi$ می‌گیرد، از فرمول (۵) نتیجه می‌شود که اگر $\nabla f(P_0) \neq 0$ ، مشتق جهتی در P_0 با کمترین مقدار مشتق در جهت مخالف $\nabla f(P_0)$ بوده، و این کمترین مقدار $|\nabla f(P_0)| -$ می‌باشد.
 (چهار) اگر $\nabla f(P_0) \neq 0$ ، مشتق جهتی در جهت متعامد به $\nabla f(P_0)$ صفر است، و این را می‌توان فوراً با اختیار $\theta = \pi/2$ در فرمول (۵) مشاهده کرد.

لذا، بخصوص، جهت افزایش ماکزیم تابع f در نقطه P_0 در جهت بردار گرادیان $\nabla f(P_0)$ ، و جهت کاهش ماکزیم f جهت مخالف آن، یعنی جهت $-\nabla f(P_0)$ ، می‌باشد.

مثال ۲. بیشترین و کمترین مقدار مشتق جهتی تابع $f(P) = f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ در نقطه $P_0 = (1, 2, 3)$ را بیابید.

حل. مثل مثال ۱،

$$\nabla f(P_0) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}.$$

لذا، طبق خاصیت (دو)، بیشترین مقدار $D_{\mathbf{u}}f(P_0)$ عبارت است از

$$|\nabla f(P_0)| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-6)^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

در جهت $\nabla f(P_0)$ ، و بنابر خاصیت (سه)، کوچکترین مقدار $D_{\mathbf{u}}f(P_0)$ مساوی است با $|\nabla f(P_0)| -$ در جهت مخالف $\nabla f(P_0)$.

همانند صفحه ۱۲۲۳، نمودار معادله

$$(۶) \quad f(P) = f(x, y, z) = c,$$

که در آن c ثابتی در برد f است، یک سطح تراز f نام دارد. فرض کنیم S نمودار (۶)

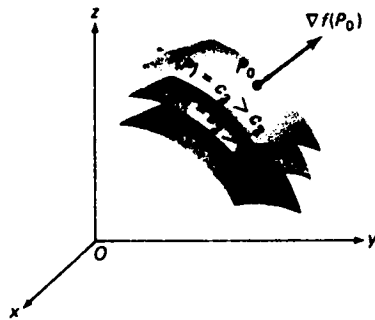
باشد. در این صورت، قائم به S در نقطه $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ همان قائم در P_0 به نمودار $F(x, y, z) = 0$ است، که در آن $F(x, y, z) = f(x, y, z) - c$. اما واضح است که $F(x, y, z)$ و $f(x, y, z)$ مشتقات جزئی یکسانی دارند. لذا، بردار \mathbf{n} در فرمول (۳)، صفحه ۱۲۶۶، که ناصفر و قائم به S در P_0 است، را می‌توان به شکل

$$\mathbf{n} = f_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k},$$

یا به‌طور فشرده‌تر

$$\mathbf{n} = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f(P_0)}{\partial z} \mathbf{k}$$

نوشت. اما این برداری است که در اینجا با $\nabla f(P_0)$ نموده و گرادیان f در P_0 نامیده می‌شود. لذا، هرگاه $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$ ، آنگاه $\nabla f(P_0)$ در P_0 به سطح تراز f مار بر P_0 عمود است، و این امر در شکل ۱۲، که در آن سه سطح تراز تابع f و بردار گرادیان در نقطه P_0 روی یکی از آنها رسم شده‌اند، توضیح داده شده است.



شکل ۱۲

حالت دوبعدی. نکات فوق همتهای طبیعی در فضای دوبعدی (R^2) دارند. فرض کنیم $f(x, y)$ تابع مشتقپذیری از دو متغیر باشد. در این صورت، گرادیان f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j},$$

و عملگر دل به

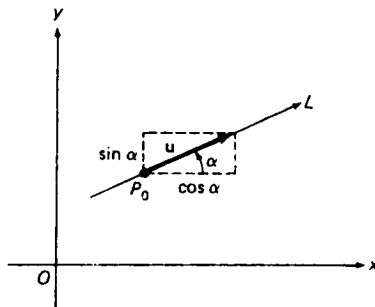
$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}$$

ساده خواهد شد. فرض کنیم L خط جهتداری در صفحه xy باشد که با محور x مثبت زاویه

α می سازد. در این صورت، $\mathbf{u} = (\cos \alpha)\mathbf{i} + (\sin \alpha)\mathbf{j}$ بردار یکه درجهت L است (ر. ک. شکل ۱۳)، و مشتق جهتی f در $P_0 = (x_0, y_0)$ در جهت L یا \mathbf{u} مساوی است با

$$(۷) \quad D_{\mathbf{u}}f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} \sin \alpha.$$

خواص (یک) تا (چهار) مشتق جهتی برای مشتق (۷) برقرارند، و به همان صورت حالت سه بعدی ثابت می شوند. در اینجا به جای سطوح تراز منحنیهای تراز $c = f(x, y)$ داریم، و ∇f بر منحنیهای تراز عمود است اگر $\nabla f \neq 0$ (مسئله ۲۵، صفحه ۱۲۷۱، را به یاد آورید).



شکل ۱۳

به علاوه، ∇f درجهت افزایش ماکزیمم f بوده، و این جهت بیشترین شیب سطح $z = f(x, y)$ است که نمودار f می باشد. مثلاً، در هر یک از اشکال ۳ (ب) و ۴ (ب)، صفحه ۱۲۲۲، بردار گرادیان در هر نقطه که $0 < x^2 + y^2 < 1$ به سوی مبدا اشاره دارد (این را تحقیق کنید)، و کوهنوردی که بخواهد از تپه نیمه کروی شکل ۳ (آ) یا تپه مخروطی شکل ۴ (آ) حتی المقدور سریع بالا رود همواره باید مستقیماً به سوی قله برود که نقطه‌ای از تپه است که مستقیماً بالای مبدا صفحه xy قرار دارد. در همین وضع یک اسکی باز که بخواهد از این تپه‌ها حتی المقدور سریع پایین بیاید همواره باید مسیری در جهت $-\nabla f$ داشته باشد؛ یعنی، مسیری که تصویرش روی صفحه xy شعاع دایره $x^2 + y^2 = 1$ است.

مثال ۳. مشتق جهتی تابع

$$f(P) = f(x, y) = xy^3 + x^2y^2 - 2y$$

را در نقطه $P_0 = (2, 1)$ و در جهت از نقطه P_0 تا نقطه $P_1 = (4, 0)$ بیابید.

حل. گرادیان مساوی است با

$$(۸) \quad \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} = (y^3 + 2xy^2)\mathbf{i} + (3xy^2 + 2x^2y - 2)\mathbf{j},$$

در نتیجه،

$$\nabla f(P_0) = \nabla f(2, 1) = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}.$$

چون $\overrightarrow{P_0P_1} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ ، جهت از P_0 به P_1 جهت یکه^۴

$$\mathbf{u} = \frac{2\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{5}}$$

است و

$$D_{\mathbf{u}}f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \mathbf{u} = (5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) \cdot \frac{2\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{5}} = \frac{10 - 12}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

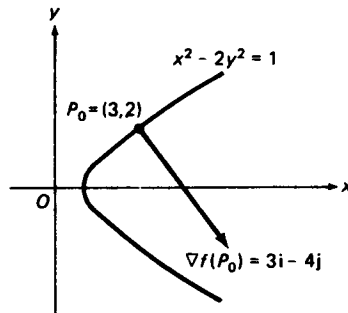
مثال ۴. جهت شیب‌ترین نزول سطح $z = f(x, y) = xy^3 + x^2y^2 - 2y$ با شروع از نقطه^۵ $(1, -2)$ را بیابید.

حل. از فرمول (۸) معلوم می‌شود که $\nabla f(1, -2) = 6\mathbf{j}$ ، و این جهت شیب‌ترین صعود در $(1, -2)$ است. لذا، جهت شیب‌ترین نزول در $(1, -2)$ جهت $-\nabla f(1, -2) = -6\mathbf{j}$ ، یعنی سمت جنوب، می‌باشد.

مثال ۵. منحنی تراز تابع $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - y^2$ مار بر نقطه^۶ $P_0 = (3, 2)$ را رسم کرده، بردار گرادیان در P_0 را بکشید.

حل. منحنی تراز f مار بر P_0 عبارت است از $f(x, y) = f(3, 2)$ ، که هذلولی $\frac{1}{2}x^2 - y^2 = \frac{1}{2}x^2 - y^2 = 1$ یا $x^2 - 2y^2 = 1$ می‌باشد (ر. ک. شکل ۱۴). چون

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j},$$



شکل ۱۴

همانطور که شکل نشان داده، گرادیان در $P_0 = (3, 2)$ مساوی است با $\nabla f(P_0) = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

گرادیان $\nabla f(P)$ در اولین مثال یک تابع برداری است که شناسه‌اش نقطه P در صفحه یا در فضا است. یک چنین تابع را یک میدان برداری می‌نامند. همچنین، می‌توان میدانهای برداری را توابعی برداری با شناسه‌های برداری گرفت. در واقع، اگر \mathbf{r} بردار موضع نقطه P متغیر در صفحه یا در فضا باشد، می‌توان به جای تابع دو یا سه متغیره $f(P)$ نوشت $f(\mathbf{r})$ ، و به جای گرادیان تابع $\nabla f(P)$ می‌نویسیم $\nabla f(\mathbf{r})$. لذا، گرادیان را می‌توان تابعی تصور کرد که بردار متغیر \mathbf{r} را به بردار دیگر $\nabla f(\mathbf{r})$ می‌نگارد.

مثال ۶. با استفاده از گرادیان، معادله صفحه مماس بر سطح $F(x, y, z) = 0$ را در نقطه $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ بنویسید.

حل. فرض کنید بردار موضع P_0 بوده، و $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ بردار $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ بردار موضع نقطه متغیر $P = (x, y, z)$ باشد. در این صورت، معادله (4) ، صفحه 1266 ، برای صفحه مماس در P_0 معادل است با معادله برداری

$$\nabla F(\mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0,$$

که در آن $\nabla F(\mathbf{r}_0) \neq \mathbf{0}$.

میدانهای برداری بخش مهمی از حساب دیفرانسیل و انتگرال چندمتغیره را تشکیل می‌دهند، و مطالعه آنها در فصل ۱۵ دنبال خواهد شد.

مسائل

گرادیان ∇f تابع f دو یا سه متغیره داده شده را یافته و، با استفاده از ∇f ، مشتق جهتی f را در نقطه داده شده P و در جهت بردار ذکر شده \mathbf{a} حساب کنید.

$$f(x, y) = 4x - 3y, P = (2, 1), \mathbf{a} = 12\mathbf{i} - 5\mathbf{j} \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 - 2xy + y^2 + 8, P = (-1, 4), \mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}, P = (25, 7), \mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} \quad (3)$$

$$f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, P = (6, 6), \mathbf{a} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \sin(x + y), P = (2, -2), \mathbf{a} = 20\mathbf{i} - 21\mathbf{j} \quad (5)$$

۱۶. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $P = (1, 3)$, $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$

۱۷. $f(x, y) = e^{x^2y}$, $P = (-1, 0)$, $\mathbf{a} = 8\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$

۱۸. $f(x, y) = \arctan(x/y)$, $P = (3, 4)$, $\mathbf{a} = -6\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$

۱۹. $f(x, y, z) = xyz$, $P = (1, 2, -3)$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

۲۰. $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$, $P = (-1, 3, 1)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

۲۱. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $P = (9, -6, 2)$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

۲۲. $f(x, y, z) = (x + y)/z$, $P = (6, -3, 3)$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

۲۳. $f(x, y, z) = z/xy$, $P = (-1, 1, 2)$, $\mathbf{a} = -10\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

۲۴. $f(x, y, z) = e^{x-y+2z}$, $P = (1, -3, -2)$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$

۲۵. $f(x, y, z) = \cos(x - y + z)$, $P = (2, 1, -1)$, $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

۲۶. $f(x, y, z) = \sinh xyz$, $P = (0, 2, 4)$, $\mathbf{a} = 12\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$

۲۷. فرض کنید $f(x, y) = x^4 + 2xy + y^3$. مشتق جهتی f را در نقطه $(1, 2)$ و در جهت شمال

غربی که با محور x مثبت زاویه 135° می سازد بیابید.

۲۸. مشتق جهتی $f(x, y) = \ln(e^x + e^y)$ در مبدأ و در جهت شمال شرقی و منصف ربع اول را بیابید.

۲۹. مشتق جهتی $f(x, y) = (x + y)^2$ را در نقطه $P_0 = (3, 2)$ و در جهت از P_0 تا $(6, 5)$ بیابید.

۳۰. فرض کنید $f(x, y) = x^2y^2 - xy^3 + 2y + 1$. مشتق جهتی f را در نقطه $P_0 = (-2, 1)$ و در جهت از P_0 به مبدأ بیابید.

۳۱. فرض کنید $f(x, y, z) = \ln(x + y + z)$. مشتق جهتی f را در نقطه $(2, 3, -4)$ و در جهتی که با محورهای مثبت مختصات زوایای حاده مساوی می سازد بیابید.

۳۲. فرض کنید $f(x, y, z) = xy^2 - xyz + z^3$. مشتق جهتی f را در نقطه $(1, 2, 1)$ و در جهت با زوایای هادی 60° ، 45° ، و 60° بیابید.

۳۳. به فرض آنکه $f(x, y) = xy$ ، بردار یکه \mathbf{u} را طوری بیابید که $D_{\mathbf{u}}f(3, 4) = 0$.

۳۴. نقاطی را بیابید که گرادیان تابع $f(x, y) = \ln(x^{-1} + y)$ در آنها مساوی $\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{i}$ باشد. منحنی تراز تابع داده شده مار برنقطه ذکر شده P را رسم کنید. همچنین، بردار گرادیان در P را رسم نمایید.

۳۵. $f(x, y) = -x + 2y$, $P = (2, 0)$

۳۶. $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 + y^2$, $P = (1, \frac{1}{2}\sqrt{3})$

۳۷. $f(x, y) = x - \frac{1}{4}y^2$, $P = (1, -2)$

۲۸. $f(x, y) = y^2 - x^2, P = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

۲۹. ماکزیمم میزان صعود سطح $z = f(x, y) = x^2$ در نقطه $(e, 1)$ و در جهتی که رخ می‌دهد چقدر است؟

۳۰. ماکزیمم میزان نزول سطح $z = f(x, y) = xy$ در نقطه $(40, -9)$ و در جهتی که رخ می‌دهد چقدر است؟

۳۱. ماکزیمم میزان صعود تابع $f(x, y, z) = xyz^3$ در نقطه $(2, 1, -1)$ و در جهتی که رخ می‌دهد چقدر است؟

۳۲. فرض کنید f و g توابع مشتقپذیری از دو یا سه متغیر باشند. نشان دهید که عملگر ∇ از همان قواعد

$$\begin{aligned} \nabla(f + g) &= \nabla f + \nabla g, & \nabla(cf) &= c\nabla f \quad (c \text{ ثابت}) \\ \nabla(fg) &= g\nabla f + f\nabla g, & \nabla\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2} \end{aligned}$$

عملگر مشتقگیری معمولی D تبعیت می‌کند.

۳۳. $\nabla(f^p)$ را در صورتی حساب کنید که f یک تابع دو یا سه متغیره^۶ مشتقپذیر و p عددی حقیقی باشد.

۳۴. فرض کنید $\mathbf{r}(t)$ در t مشتقپذیر بوده، و $f(\mathbf{r})$ در \mathbf{r} ، یعنی در نقطه با بردار موضع \mathbf{r} ، مشتقپذیر باشد. نشان دهید که

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

ارتفاع یک کوه از سطح دریا از فرمول $1000 - 0.3x^2 - 0.2y^2$ متر z به دست می‌آید، که در آن محور x مثبت به سمت مشرق و محور y مثبت به سمت شمال اشاره دارد. یک کوهنورد به نقطه $(5, -10, 972.5)$ رسیده است.

۳۵. اگر کوهنورد به غرب برود، آیا صعود می‌کند یا نزول و با چه سرعتی؟

۳۶. اگر به جنوب شرقی برود، آیا صعود می‌کند یا نزول و با چه سرعتی؟

۳۷. در چه جهتی باید حرکت کند تا در ارتفاع ثابتی بماند؟

۳۸. دمای T در یک نقطه از یک کره^۶ فلزی توپر به مرکز مبدا^۶ با تابع $T = T_0 e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ داده شده است. گرمترین نقطه^۶ گوی کجاست؟ نشان دهید که در هر نقطه از گوی دما در جهتی بیشترین افزایش را دارد که به سمت مبدا^۶ باشد.

فرض کنید \mathbf{a} و \mathbf{b} بردارهای ثابتی باشند. گرادیان تابع داده شده^۶ $f(\mathbf{r})$ بردار موضع $\mathbf{r} = xi + yj + zk$ را بیابید.

$$f(\mathbf{r}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}) \quad \cdot ۴۰$$

$$f(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} \quad \cdot ۳۹$$

$$f(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{r}) \quad \cdot ۴۱$$

۴۲. گرادیان تابع $f(\mathbf{r}) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$ را به ازای $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ و $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$ یافته‌و، با استفاده از نتیجه، خاصیت انعکاسی بیضی را، که در بخش ۳۰۱۰ بدون بردارها ثابت شد، اثبات نمایید.

۴۳. فرض کنید $f(x, y)$ درون یک دایره یا مستطیل مشتقپذیر بوده، و به ازای هر نقطه از D $\nabla f(x, y) = 0$ نشان دهید که $f(x, y)$ بر D ثابت است.

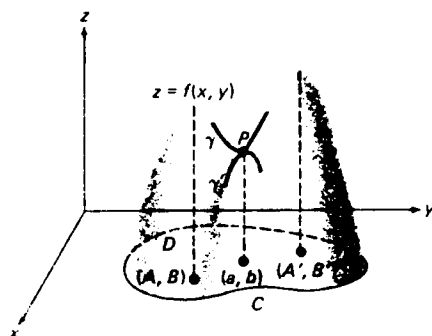
۱۳.۸ اکستریمهای توابع چندمتغیره

اکستریمهای مطلق در مقابل اکستریمهای موضعی. حال اکستریمها (یا مقادیر اکستریم) توابع چند متغیره را در نظر گرفته، به توابع دو متغیره توجه می‌کنیم که می‌توان نمودارهایشان را رسم و از شهود هندسی آزادانه استفاده کرد. اکستریمهای مطلق و موضعی توابع دو متغیره همانند توابع یک متغیره تعریف می‌شوند. به‌طور مشخص، فرض کنیم $f(x, y)$ یک تابع دو متغیره باشد که بر مجموعه D از نقاط در صفحه xy تعریف شده است، و نقطه‌ای مانند (A, B) در D باشد به طوری که به ازای هر (x, y) در D ، $f(A, B) \geq f(x, y)$. در این صورت، عدد $f(A, B) = M$ ماکزیم f بر D نامیده می‌شود. به همین نحو، اگر نقطه‌ای مانند (a, b) در D باشد به طوری که به ازای هر (x, y) در D ، $f(a, b) \leq f(x, y)$ ، عدد $f(a, b) = m$ مینیم f بر D نام دارد. این اکستریمها را اغلب اکستریمهای مطلق می‌نامند تا با اکستریمهای موضعی f ، که به صورت زیر تعریف می‌شوند، متمایز باشد.

فرض کنیم به ازای هر (x, y) به قدر کافی نزدیک به (a, b) ، یعنی به ازای هر (x, y) در همسایگی از (a, b) ، $f(a, b) \geq f(x, y)$ در این صورت، گوییم f در (a, b) ماکزیم موضعی مساوی $f(a, b)$ دارد، و این ماکزیم را اکید نامیم اگر به ازای هر (x, y) در همسایگی سفته‌ای از (a, b) ، به جای \geq داشته باشیم $>$ یعنی $f(a, b) > f(x, y)$. به همین نحو، هرگاه به ازای هر (x, y) در همسایگی (a, b) داشته باشیم $f(a, b) \leq f(x, y)$ ، آنگاه گوییم f در (a, b) مینیم موضعی مساوی $f(a, b)$ دارد، و این مینیم را اکید نامیم اگر به ازای هر (x, y) در همسایگی سفته‌ای از (a, b) ، به جای \leq داشته باشیم $<$ یعنی $f(a, b) < f(x, y)$.

مثال ۱. شکل ۱۵ سطح S را نشان می‌دهد که نمودار تابع دو متغیره $f(x, y)$ است که قلمروش مجموعه D بسته xy است که به منحنی بسته ساده C که "لبه" S نیز هست محدود می‌باشد. سطح S دوقله دارد که هر یک نظیر یک ماکزیم موضعی اکید f است، یکی

در (A, B) و دیگری در (A', B') در نگاه اول ممکن است این طور به نظر برسد که f در (a, b) مینیمم موضعی اکیس دارد، ولی از بررسی دقیقتر معلوم می شود که این درست نیست. و در واقع، f در (a, b) نقطهٔ زینی یا مینیماکس دارد به این معنی که (قس. مثال ۶، صفحه ۱۲۰۴) فرض کنیم P نقطه‌ای از S مستقیماً بالای (a, b) بوده، و γ و γ' منحنیهای فصل مشترک صفحات $x=a$ و $y=b$ با S باشند (هر دو صفحه از P عبور می کنند). در این صورت، مورچه‌ای که در امتداد γ حرکت می کند P را پایین ترین نقطهٔ مسیر خود می یابد، ولی مورچه‌ای که در امتداد γ' در حرکت است P را بالاترین نقطهٔ مسیر خود می بیند! بخصوص، تابع f در هر همسایگی (a, b) مقادیر بزرگتر از $f(a, b)$ و مقادیر کوچکتر از $f(a, b)$ را می گیرد؛ در نتیجه، f نمی تواند در (a, b) اکسترم موضعی داشته باشد.



شکل ۱۵

ماکزیمم مطلق f بر D در (A', B') است، و مساوی ارتفاع بیشتر دو قلهٔ سطح S می باشد. مینیمم مطلق f بر D مساوی ۰ است، و این مقدار در هر نقطه از منحنی C که مرز ناحیه D است گرفته می شود. توجه کنید که f بر C مینیمم موضعی ندارد، فقط به این خاطر که تعریف اکسترم موضعی مستلزم مقایسهٔ مقدار f در نقطهٔ داده شده (a, b) با مقادیر f در تمام نقاط یک همسایگی از (a, b) است، و این مقایسه فقط وقتی میسر است که (a, b) نقطهٔ درونی D باشد، چرا که در این صورت همسایگی از (a, b) وجود دارد که فقط از نقاط D تشکیل شده است.

هرگاه f تابعی با قلمرو D باشد، آنگاه اکسترمم مطلق f در نقطهٔ درونی D خود بخود یک اکسترمم موضعی f است. (هم اکنون دیدیم f نمی تواند در یک نقطهٔ مرزی D اکسترمم موضعی داشته باشد.) مثلاً، فرض کنیم f در نقطهٔ درونی (a, b) از D مینیمم موضعی داشته

باشد. در این صورت، به ازای هر (x, y) در D ، $f(a, b) \leq f(x, y)$ ؛ و در نتیجه، به ازای هر (x, y) در همسایگی به قدر کافی کوچکی از (a, b) که فقط از نقاط D تشکیل شده است،

$$f(a, b) \leq f(x, y)$$

گوییم مجموعه D از نقاط صفحه xy کراندار است اگر دایره $x^2 + y^2 = r^2$ وجود داشته باشد که همه نقاط D را دربرگیرد. مثلاً، درون هر بیضی (صرف نظر از موضع مرکز) کراندار است، ولی ربع اول چنین نیست. در اینجا مهم است درک شود که واژه "کراندار" ارتباطی با واژه "مرز" ندارد. مثلاً، ربع اول، با آنکه بی کران است، مرز دارد و آن عبارت است از محورهای x و y نامنفی. گوییم تابع دو متغیره $f(x, y)$ بر مجموعه D کراندار است اگر عددی مانند $C > 0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر (x, y) در D ، $|f(x, y)| \leq C$. مثلاً، تابع $\sin xy$ بر تمام صفحه xy کراندار است، ولی تابع $1/(x^2 + y^2)$ بر هر مجموعه که مبدأ یک نقطه e مرزی آن است بی کران می باشد (چرا؟).

قضیه مقدار اکسترمم. یکی از قضایای کلیدی حساب دیفرانسیل و انتگرال قضیه مقدار اکسترمم است (ر. ک. صفحه ۱۵۹) که می گوید هر تابع پیوسته بر بازه بسته I بر I کراندار بوده و بر این بازه هم ماکزیمم و هم مینیمم دارد. نتیجه ای مشابه برای توابع دو متغیره برقرار است. ما برهان آن را که معمولاً در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته داده می شود، همانند حالت یک متغیره، حذف می کنیم.

قضیه ۵ (قضیه مقدار اکسترمم برای یک تابع دو متغیره). فرض کنیم $f(x, y)$ یک تابع دو متغیره باشد که بر مجموعه بسته و کراندار D پیوسته است. در این صورت، f بر D کراندار بوده و ماکزیمم M و مینیمم m خود را بر D می گیرد؛ یعنی، نقاطی مانند (A, B) و (a, b) در D هستند به طوری که به ازای هر (x, y) در D ،

$$f(a, b) \leq f(x, y) \leq f(A, B)$$

لذا، تابع پیوسته $f(x, y)$ بر مجموعه بسته D کراندار همیشه اکسترمم مطلق دارد. این اکسترممها یا در بین اکسترممهای موضعی f (در نقاطی درونی از D) یافت می شوند یا در نقاط مرزی D می باشند. لذا برای جستجوی اکسترممهای مطلق f بر D ، ابتدا باید اکسترممهای موضعی f را بیابیم تا بتوانیم مقادیر آنها را با مقادیر f روی مرز D مقایسه کنیم. همواره فرض می شود که تابع f مورد نظر پیوسته است، ولی امکان دارد در بعضی نقاط

مشتقپذیر نباشد. درست مثل توابع یک متغیره، آزمون ساده‌ای مستلزم مشتقپذیری وجود دارد که اکسترمهای موضعی احتمالی f را مشخص می‌نماید:

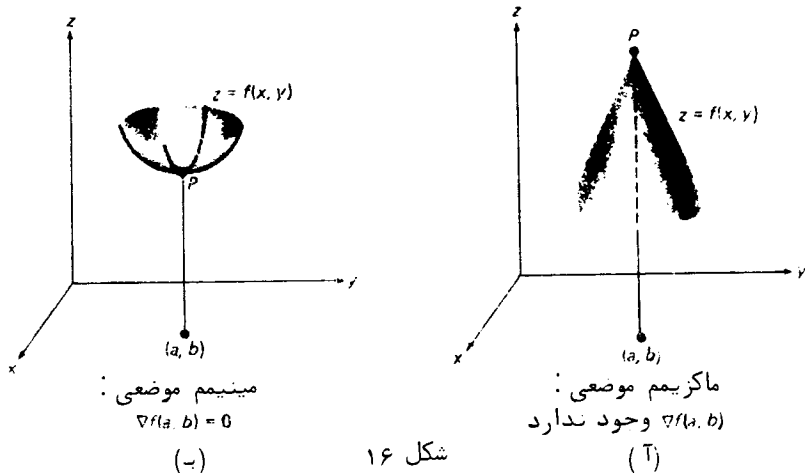
قضیه ۶ (شرط لازم برای اکسترم موضعی یک تابع دومتغیره) فرض کنیم $f(x, y)$ یک تابع دومتغیره باشد که در نقطه (a, b) اکسترم موضعی دارد. در این صورت، یا f در (a, b) مشتق ناپذیر است، یا در (a, b) مشتقپذیر بوده و $\nabla f(a, b) = 0$ ، یعنی $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$.

برهان. یا f در (a, b) مشتق ناپذیر است، و در این صورت چیزی برای اثبات وجود ندارد، یا f در (a, b) مشتقپذیر می‌باشد. در حالت دوم، مشتقات جزئی $f_x(a, b)$ و $f_y(a, b)$ هر دو وجود دارند. اما، در این صورت، توابع یک متغیره $f(x, b)$ و $f(a, y)$ هر دو مشتقپذیرند، اولی در $x = a$ و دومی در $y = b$ ، با مشتقات

$$(1) \quad \left. \frac{df(x, y)}{dx} \right|_{x=a} = f_x(a, b), \quad \left. \frac{df(a, y)}{dy} \right|_{y=b} = f_y(a, b).$$

چون $f(x, y)$ در (a, b) اکسترم موضعی دارد، $f(x, b)$ دو a و $f(a, y)$ در b اکسترم موضعی دارد (چرا؟) لذا، طبق قضیه ۶، صفحه ۲۶۷ (شرط لازم برای اکسترم موضعی تابع یک متغیره)، طرفهای چپ فرمولهای (۱) صفرند؛ در نتیجه، $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ یا معادلاً $\nabla f(a, b) = f_x(a, b)\mathbf{i} + f_y(a, b)\mathbf{j} = 0$.

قضیه ۶ در تعبیر هندسی می‌گوید هرگاه تابع $f(x, y)$ در نقطه (a, b) اکسترم موضعی داشته باشد، آنگاه یا نمودار f در نقطه $P = (a, b, f(a, b))$ صفحه مماس ندارد (اگر $\nabla f(a, b)$



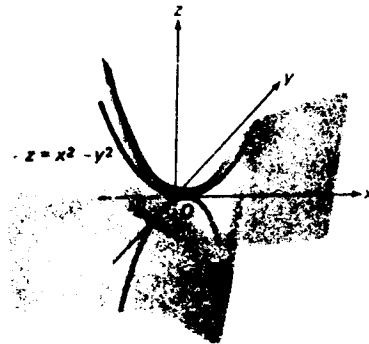
موجود نباشد) ، یا نمودار f در P صفحه مماس افقی دارد (اگر $\nabla f(a, b) = 0$) (این امر از فرمول (۶) ، صفحه ۱۲۶۸ ، به ازای $x_0 = a, y_0 = b$ نتیجه می شود) . در شکل ۱۶ (آ) و ۱۶ (ب) ، این دو حالت توضیح داده شده اند ، که در آنها نمودار دو تابع ، هر یک با اکسترم موضعی (اکید) در (a, b) ، رسم شده است .

نقاط بحرانی و نقاط زینی . منظور از یک نقطه بحرانی تابع دو متغیره $f(x, y)$ یعنی نقطه ای مانند (a, b) که در آن مشتق پذیر نیست ؛ در نتیجه ، گرادیان $\nabla f(a, b)$ وجود ندارد ، یا $\nabla f(a, b)$ موجود و مساوی بردار صفر می باشد . بنابر قضیه ۶ ، هرگاه f در (a, b) اکسترم موضعی داشته باشد ، آنگاه (a, b) یک نقطه بحرانی f است . از آن سو ، درست مثل توابع یک متغیره ، اگر (a, b) یک نقطه بحرانی f باشد ، تابع f ممکن است در (a, b) اکسترم موضعی نداشته باشد . اگر $\nabla f(a, b) = 0$ و هر همسایگی (a, b) شامل نقاطی چون (x, y) باشد که $f(x, y) > f(a, b)$ و نقاطی دیگر که $f(x, y) < f(a, b)$ ، گوئیم f در (a, b) یک نقطه زینی (یا مینیماکس) دارد .

مثال ۲ . تابع

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

را در نظر می گیریم که نمودارش سهمی گون هذلولوی شکل ۱۷ است .



شکل ۱۷

مشتقات جزئی

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

هر دو در مبدأ $O = (0, 0)$ مساوی صفرند. در نتیجه، $\nabla f(0, 0) = 0$. بنابراین، O نقطه بحرانی f می باشد. اما f در O اکسترم موضعی ندارد. در واقع،

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2,$$

و در نتیجه، بنابر آزمون مشتق دوم برای تابع یک متغیره (قضیه ۹، صفحه ۲۷۲)، تابع $f(x, 0)$ در O مینیم موضعی دارد، حال آنکه تابع $f(0, y)$ در O دارای ماکزیم موضعی است، و این مانع آن می شود که $f(x, y)$ در $O = (0, 0)$ ماکزیم موضعی یا مینیم موضعی داشته باشد. در واقع، همانطور که از شکل برمی آید، مبدأ O یک نقطه زینی f است، زیرا $f(0, 0) = 0$ و f در هر همسایگی O مقادیر مثبت و منفی می گیرد.

لذا، چیزی که واقعا "می خواهیم شرایطی بر تابع f است که f را مجبور به داشتن اکسترم موضعی در نقطه (a, b) سازد. برای تابع دومتغیره، این شرایط در تعمیم دوبعدی آزمون مشتق دوم زیر، که بدون برهان بیان می شود، ذکر شده است. گاهی برای اختصار از واژه "جزئی" به عنوان مترادف "مشتق جزئی" استفاده خواهیم کرد.

آزمون جزئیهای دوم

قضیه ۷ (آزمون جزئیهای دوم برای اکسترم موضعی یک تابع دومتغیره). فرض کنیم $f(x, y)$ در همسایگی نقطه بحرانی (a, b) مشتقات جزئی دوم پیوسته داشته باشد، و

$$A = f_{xx}(a, b), \quad B = f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b), \\ C = f_{yy}(a, b), \quad D = AC - B^2.$$

در این صورت،

(یک) f در (a, b) ماکزیم موضعی اکید دارد اگر $D > 0$ و $A < 0$ ؛

(دو) f در (a, b) مینیم موضعی اکید دارد اگر $D > 0$ و $A > 0$ ؛

(سه) f در (a, b) نقطه زینی دارد اگر $D < 0$.

عبارت D مبین f در (a, b) نامیده شده و مساوی دترمینان زیر است:

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

که در (a, b) حساب شده است. اگر $D = 0$ ، آزمون جزئیهای دوم بی حاصل است. مثلا، هر

یک از توابع $f(x, y) = x^2 + y^4$ و $g(x, y) = x^2 + y^3$ در مبدأ O نقطه بحرانی دارد، و در هر دو حالت مین در O صفر است (این را تحقیق نمایید). اما f در O مینیمم موضعی دارد، زیرا $f(0, 0) = 0$ و اگر $(x, y) \neq (0, 0)$ ، $f(x, y) > 0$ ، حال آنکه g در O اکسترم ندارد، زیرا $g(0, y) = y^3$ بر بازه $-\infty < y < \infty$ صعودی می باشد.

مثال ۳. رفتار تابع

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

در نقاط بحرانی اش را بررسی کنید.

حل. چون f همه جا مشتقپذیر است، مختصات نقاط بحرانی را می توان با حل معادلات همزمان

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0$$

به دست آورد. معادله اول ایجاب می کند که $y = x^2$ ، که وقتی در معادله دوم گذارده شود، $x^4 = x$ ؛ در نتیجه، $x = 0$ یا $x = 1$. بنابراین، f درست دو نقطه بحرانی دارد؛ یعنی، $(0, 0)$ و $(1, 1)$. چون

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y,$$

در $(0, 0)$ داریم

$$A = 0, \quad B = -3, \quad C = 0, \quad D = AC - B^2 = -9$$

و، در $(1, 1)$

$$A = 6, \quad B = -3, \quad C = 6, \quad D = AC - B^2 = 27$$

از قضیه ۷ معلوم می شود که f در $(0, 0)$ نقطه زینی و در $(1, 1)$ مینیمم موضعی اکید دارد. مینیمم مساوی است با $f(1, 1) = -1$.

مثال ۴. اکسترمهای موضعی تابع

$$(۲) \quad f(x, y) = xy(3 - x - y)$$

را بیابید.

حل. این بار مختصات نقاط بحرانی در معادلات زیر صدق می کنند:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y(3 - 2x - y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x(3 - x - 2y) = 0.$$

معادله اول می‌گوید که $y = 0$ یا $y = 3 - 2x$ ، و معادله دوم می‌گوید که $x = 0$ یا $x = 3 - 2y$ که از این معلوم می‌شود (به‌طور مشروح تحقیق کنید) که درست چهار نقطه بحرانی، یعنی $(1, 1)$ ، $(0, 3)$ ، $(3, 0)$ ، $(0, 0)$ ، وجود دارند. با محاسبه جزئیهای دوم، خواهیم داشت

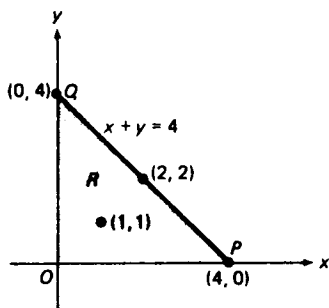
$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3 - 2x - 2y, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x,$$

و در نتیجه،

$$D = AC - B^2 = 4xy - (3 - 2x - 2y)^2.$$

در هر یک از نقاط بحرانی $(0, 0)$ ، $(3, 0)$ ، و $(0, 3)$ داریم $D = -9$. لذا، طبق آزمون جزئیهای دوم، f در هیچیک از این نقاط، که همه زینی‌اند، اکسترم موضعی ندارد. اما در $(1, 1)$ داریم $A = -2$ و $D = 3$ ؛ در نتیجه، f در $(1, 1)$ ماکزیم موضعی اکیدی مساوی $f(1, 1) = 1$ دارد.

مثال ۵. اکسترمهای مطلق تابع (۲) را بر ناحیه بسته R بین محورهای نامنفی مختصات و خط $x + y = 4$ بیابید (ر.ک. شکل ۱۸).



شکل ۱۸

حل. تابع (۲) پیوسته، و ناحیه R کراندار و بسته است. لذا، طبق قضیه ۵، f بر R اکسترم مطلق دارد. این اکسترمها فقط می‌توانند روی مرز R یا در نقاط بحرانی f که نقاط درونی R اند رخ دهند (توضیح دهید). اما از چهار نقطه بحرانی f به دست آمده در مثال قبل فقط نقطه $(1, 1)$ نقطه درونی است. لذا، ماکزیم (مطلق) R بر f بیشترین

مقداری است که f در یک نقطه مرزی R یا در $(1, 1)$ می‌گیرد، حال آنکه مینیمم f بر R کمترین مقداری است که f در یک نقطه مرزی یا در $(1, 1)$ خواهد گرفت.

حال این مقادیر را باهم مقایسه می‌کنیم. مرز R از سه پاره خط، که در شکل OQ ، OP و PQ است، تشکیل شده است. تابع f بر OP و OQ متحد صفر است، ولی بر PQ ، که $x + y = 4$ ، می‌توان آن را تابعی از متغیر x مانند

$$g(x) = f(x, 4 - x) = x(x - 4) \quad (0 \leq x \leq 4)$$

گرفت. با مشتگیری از g نسبت به x ، معلوم می‌شود که $g'(x) = 2x - 4$ ، در نتیجه، تنها نقطه بحرانی g ، $x = 2$ است که داریم $g'(2) = 0$ و $g(2) = -4$. همچنین، $g(0) = g(4) = 0$ ، در نتیجه، ماکزیمم g بر $0 \leq x \leq 4$ عبارت است از $\max\{g(0), g(2), g(4)\} = \max\{0, -4, 0\} = 0$ و مینیمم g بر $0 \leq x \leq 4$ عبارت است از $\min\{g(0), g(2), g(4)\} = \min\{0, -4, 0\} = -4$. اینها ماکزیمم و مینیمم $f(x, y)$ بر پاره خط PQ اند؛ و در واقع، ماکزیمم در نقاط انتهایی $P = (4, 0)$ ، $Q = (0, 4)$ و مینیمم در نقطه میانی $(2, 2)$ می‌باشد. لذا، اگر γ مرز R باشد، ماکزیمم f بر γ مساوی 0 است که روی پاره خطهای OP و OQ گرفته می‌شود، ولی مینیمم f بر γ مساوی -4 است که در نقطه $(2, 2)$ گرفته خواهد شد. همچنین، f در نقطه بحرانی درونی $(1, 1)$ دارای مقدار 1 می‌باشد. لذا، بالاخره، ماکزیمم f بر R مساوی $\max\{0, 1\} = 1$ است که در نقطه درونی $(1, 1)$ گرفته می‌شود، ولی مینیمم f بر R مساوی -4 است که در نقطه مرزی $(2, 2)$ گرفته خواهد شد.

مثال زیر یک نمونه از مسائل بهینه‌سازی کار بسته است که می‌توان آن را به کمک تکنیکهای این بخش حل کرد.

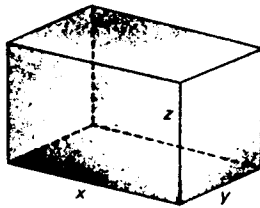
مثال ۶. کمترین مقدار تخته لازم برای ساختن یک جعبه مستطیلی بسته به حجم معلوم V را بیابید. از ضخامت تخته صرف نظر کرده، و فرض کنید هیچ مقداری از آن به هدر نرود.

حل. البته منظور از "مقدار" تخته یعنی مساحت کل S جعبه. فرض کنیم x طول، y عرض و z ارتفاع جعبه باشد (ر.ک. شکل ۱۹). در این صورت،

$$(۳) \quad S = 2(xy + xz + yz),$$

زیرا مساحت بالا و پایین جعبه xy بوده، و چهار طرف دارد که دو تا به مساحت xz و دو تا به مساحت yz می‌باشند. مسئله مینیمم ساختن S تحت این شرط است که حجم

$$(۴) \quad V = xyz$$



شکل ۱۹

جعبه ثابت است . برای تلفیق این شرط در مسئله ، معادله (۴) را نسبت به z حل کرده ، به دست می‌آوریم $z = V/xy$. سپس ، با گذاردن $z = V/xy$ در (۳) ، این رابطه به تابع

$$(۳') \quad S = S(x, y) = 2 \left(xy + \frac{V}{y} + \frac{V}{x} \right)$$

از دو متغیر x و y تبدیل می‌شود که قلمرو تعریفش ربع اول Q صفحه xy است (به یاد داشته باشید که x و y داتا " مثبت‌اند) .

برای یافتن نقاط بحرانی S ، از (۳') مشتق گرفته و جزئیهای اول

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2 \left(y - \frac{V}{x^2} \right), \quad \frac{\partial S}{\partial y} = 2 \left(x - \frac{V}{y^2} \right) = 0$$

را مساوی صفر قرار می‌دهیم . تنها جواب معادلات همزمان حاصل

$$y - \frac{V}{x^2} = 0, \quad x - \frac{V}{y^2} = 0$$

در Q عبارت است از $x = V^{1/3}, y = V^{1/3}$ ؛ در نتیجه ، $(V^{1/3}, V^{1/3})$ تنها نقطه بحرانی S در Q است (محاسبات را امتحان کنید) . در این نقطه x, y ، و $z = V/xy$ همه مساوی $V^{1/3}$ اند ؛ یعنی ، جعبه مکعبی است . اما از (۳') واضح است که اگر $x \rightarrow 0^+$ یا $y \rightarrow 0^+$ ، و نیز اگر $x \rightarrow \infty$ یا $y \rightarrow \infty$ ، داریم $S \rightarrow \infty$. لذا ، طبق مشابه دوبعدی قضیه ۱۲ ، صفحه ۳۲۸ ، S بر Q در $(V^{1/3}, V^{1/3})$ مینیمم مطلق مساوی $S(V^{1/3}, V^{1/3}) = 6V^{2/3}$ دارد . مثلاً " ، کمترین چوب لازم برای ساختن یک جعبه به حجم 3375 cu. in. مساوی $6(3375)^{2/3} = 1350$ sq. in. بوده ، و جعبه باید مکعبی به طول ضلع 15 in. باشد .

تابع S بر Q ماکزیمم مطلق ندارد (چرا ندارد ؟) ، ولی این قضیه ۵ را نقض نمی‌کند ، زیرا مجموعه Q نه کراندار است نه بسته . از محاسبه جزئیهای دوم S معلوم

می شود که

$$A = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{4V}{x^3}, \quad B = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = 2, \quad C = \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \frac{4V}{y^3},$$

در نتیجه، در $P = (V^{1/3}, V^{1/3})$

$$A = 4, \quad B = 2, \quad C = 4, \quad D = AC - B^2 = 12$$

بنابراین، قضیه γ به ما می گوید که S در P مینیمم موضعی دارد، ولی ما قبلاً "با استدلالی دیگر نشان داده ایم که S در P مینیمم مطلق دارد.

حالت بیش از دو متغیر. بالاخره، نشان می دهیم که چگونه می توان نتایج این بخش را به توابع بیش از دو متغیر تعمیم داد. اکستریمهای مطلق و موضعی تابع n متغیره $f(x_1, \dots, x_n)$ اساساً "مانند صفحه ۱۲۸۲، با (x_1, \dots, x_n) به جای (x, y) و (a_1, \dots, a_n) به جای (a, b) ، تعریف می شوند. مثلاً، اگر به ازای هر (x_1, \dots, x_n) در همسایگی چون

$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} < \delta$$

از (a_1, \dots, a_n) داشته باشیم $f(a_1, \dots, a_n) \geq f(x_1, \dots, x_n)$ ، گوئیم f در (a_1, \dots, a_n) ماکزیمم موضعی مساوی $f(a_1, \dots, a_n)$ دارد. قضیه δ فقط با کمی تعدیل به توابع n متغیره تعمیم می یابد. به طور مشخص، کرانداری مجموعه D در فضای n بعدی (R^n) یعنی "کره n بعدی"

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = r^2$$

وجود دارد که تمام نقاط D را دربر می گیرد، و اگر قضیه δ را در مورد تابع $f(x_1, \dots, x_n)$ از n متغیر و مجموعه بسته کراندار D در R^n اعمال کنیم، معلوم می شود که "نقاطی مانند (A_1, \dots, A_n) و (a_1, \dots, a_n) در D وجود دارند به طوری که به ازای هر (x_1, \dots, x_n) در D ،

$$f(a_1, \dots, a_n) \leq f(x_1, \dots, x_n) \leq f(A_1, \dots, A_n)$$

تعمیم قضیه ϵ نیز، اساساً "با همان برهان به ازای $n = 2$ ، فوراً" انجام می شود، و به قرار زیر است: فرض کنیم $f(x_1, \dots, x_n)$ تابعی n متغیره باشد که در نقطه (a_1, \dots, a_n) اکستریم موضعی دارد. در این صورت، یا f در (a_1, \dots, a_n) مشتق پذیر بوده و همه مشتقات جزئی اول $f_{x_1}(a_1, \dots, a_n), \dots, f_{x_n}(a_1, \dots, a_n)$ آن مساوی صفر می باشند. مثل حالت دوبعدی، نقاط مشتق ناپذیری f یا نقاطی که در آنها $f_{x_1} = \dots = f_{x_n} = 0$ را نقاط بحرانی f می نامند. به ازای $n = 3$ ، معمولاً "به جای $f(x_1, x_2, x_3)$ می نویسیم $f(x, y, z)$ و به جای (a_1, a_2, a_3) می نویسیم (a, b, c) . لذا، هرگاه $f(x, y, z)$ در (a, b, c) اکستریم موضعی داشته باشد، آنگاه (a, b, c) یک نقطه بحرانی f است؛ یعنی،

یا f در (a, b, c) مشتق ناپذیر است یا $\nabla f(a, b, c) = \mathbf{0}$. تعمیم قضیه ۷ (آزمون جزئیهای دوم) پیچیده تر است، و در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته بررسی می شود.

مسائل

تمام نقاط بحرانی تابع داده شده را بیابید. سپس معین کنید که هر نقطه بحرانی نظیر به ماکزیمم موضعی، مینیمم موضعی، یا نقطه زینی است.

$$f(x, y) = 2x^2 + (y - 1)^2 \quad . 1$$

$$f(x, y) = (x + 1)^2 - 2y^2 \quad . 2$$

$$f(x, y) = -x^2 + xy - y^2 + 6x - 9y + 15 \quad . 3$$

$$f(x, y) = (x - y + 2)^2 \quad . 4$$

$$f(x, y) = 2x^2 + 3xy + y^2 - 2x - 4y + 8 \quad . 5$$

$$f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 108y \quad . 6$$

$$f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4 \quad . 7$$

$$f(x, y) = xy + 20x^{-1} + 50y^{-1} \quad (x > 0, y > 0) \quad . 8$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} - x^2 + 9x - y \quad (y > 0) \quad . 9$$

$$f(x, y) = 8x^3 + y^3 - 12xy + 6 \quad . 10$$

$$f(x, y) = (2x - x^2)(2y - y^2) \quad . 11$$

$$f(x, y) = x^2y^3(6 - x - y) \quad (x > 0, y > 0) \quad . 12$$

$$g(u, v) = u \sin v \quad . 13$$

$$h(u, v) = e^u \cos v \quad . 14$$

$$f(x, y) = \sin x + \sin y \quad (0 < x < \pi, 0 < y < \pi) \quad . 15$$

$$f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y) \quad (0 < x < \pi, 0 < y < \pi) \quad . 16$$

$$f(x, y) = (x^2 + 2x + y)e^y \quad . 17$$

$$f(x, y) = e^{xy} \quad . 18$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)} \quad . 19$$

$$f(x, y) = (x - 1) \ln xy \quad (xy > 0) \quad . 20$$

اکسترممهای مطلق تابع داده شده f بر ناحیه ذکر شده R را بیابید.

$$f(x, y) = x^2 - y^2, R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4\} \quad . 21$$

$$f(x, y) = xy, R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 2\} \quad . 22$$

$$f(x, y) = 2xy + y^2 + 8x - 4y, R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\} \quad . 23$$

۲۴. $f(x, y) = (3x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$, $R = \{(x, y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$
۲۵. ماکزیم حاصل ضرب سه عدد مثبتی را بیابید که مجموعشان 60 باشد.
۲۶. مینیم مجموع سه عدد مثبت را بیابید که حاصل ضربشان 343 باشد.
۲۷. بیشترین حجم یک جعبه مستطیلی بسته را بیابید که مساحتش 600 cm^3 باشد.
۲۸. مثال ۶ را در مورد جعبه‌ای که سر ندارد حل کنید.
۲۹. متوازی‌الاضلاعی با بیشترین مساحت بیابید که محیطش عدد معلوم p باشد.
۳۰. فرض کنید T مثلثی به رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، و $(0, 1)$ باشد. نقطه P داخل T را طوری بیابید که مجموع مجذورات فواصل P تا رئوس T مینیم باشد.
۳۱. در بیضی گون $1 = (x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2)$ یک جعبه مکعب مستطیل محاط شده است که اضلاعش با محورهای مختصات موازی است. حجم ماکزیم این جعبه چقدر است؟
۳۲. نقطه $P = (a, b, c)$ در یکپشت اول داده شده است. صفحه مار بر P را بیابید که از یکپشت اول چهاروجهی با حجم مینیم جدا کند. این حجم مینیم چقدر است؟
۳۳. اکسترمهای مطلق تابع

$$f(x, y, z) = (ax + by + cz)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

را بیابید.

۳۴. تابع دو متغیره $f(x, y)$ با مشتقات جزئی پیوسته داده شده است. فرض کنید
- $$f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

$$f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0.$$

نشان دهید که (x_0, y_0) یک نقطه تنهای نمودار معادله $f(x, y) = 0$ است، بدین معنی که همسایگی از (x_0, y_0) وجود دارد که شامل هیچ نقطه‌ای از نمودار جز (x_0, y_0) نیست. نشان دهید که مبدأ یک نقطه تنهای نمودار معادله $x^3 - y^3 + xy^2 - yx^2 + x^2 + y^2 = 0$ است، و نمودار را رسم نمایید.

راهنمایی. از آزمون جزئیهای دوم استفاده کنید.

۳۵. کمیتی که معمولاً "برای سنجش نزدیکی خط $y = f(x) = mx + b$ با n نقطه $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ در صفحه به کار می‌رود مجموع زیر است:

$$S = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^n (mx_i + b - y_i)^2,$$

که مجموع مجذورات انحرافهای بین مقادیر معلوم y_i و عرضهای خط $y = mx + b$ نظیر به مقادیر معلوم x_i می‌باشد. این سنجش نزدیکی از مجموع $\sum [f(x_i) - y_i]$ خود

انحرافات بهتر است؛ در مجموع اخیر جملات مثبت و منفی می‌توانند یکدیگر را حذف کرده و نتیجه معلومی به ما بدهند که نقاط نزدیک خط قرار دارند، حتی وقتی نقاط در مجاورت خط نیستند. خط $y = mx + b$ که S را مینیمم می‌سازد خط بهترین برازش به n نقطه، یا به زبان آمار، خط برگشت نام دارد. نشان دهید این خط به شیب

$$m = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} \quad (\text{یک})$$

و قطع y

$$b = \bar{y} - m \bar{x} \quad (\text{دو})$$

است، که در آن

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

(مثال ۶، صفحه ۱۲۲۰، را به یاد آورید.)

راهنمایی. توجه کنید که S تابعی از m و b است.

به کمک فرمولهای (یک) و (دو)، خط برگشت مجموعه نقاط داده شده را بیابید.

۳۶. $(1, 0), (3, 2), (5, 4)$

۳۷. $(-1, 0), (0, 1), (1, 1), (2, -1)$

۳۸. $(0, 0), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 3)$

در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته ثابت شده است که تابع سه متغیره $f(x, y, z)$ با مشتقات جزئی دوم پیوسته در نقطه بحرانی (a, b, c) مینیمم موضعی دارد اگر سه کمیت

$$A = f_{xx}, \quad D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}, \quad E = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$$

در (a, b, c) مثبت باشند، و در (a, b, c) ماکزیمم موضعی اکید دارد اگر در (a, b, c) داشته باشیم $A < 0, D > 0, E < 0$. با استفاده از این آزمون، اکسترمهای موضعی تابع داده شده را بیابید.

۳۹. $f(x, y, z) = xy + 3x - x^2 - y^2 - z^2$

۴۰. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + xy - 9x - 3y + 4z + 10$

آیا تابع داده شده در مبداء اکسترم موضعی دارد؟

۴۱. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz$

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz \quad . ۴۲$$

۹.۱۳ ضرایب لاگرانژ

ممکن است قبلاً "متوجه شده باشید که برای حل بسیاری از مسائل بهینه‌سازی ذکر شده در بخش اخیر (و بخش ۷.۳) ، باید ماکزیمیم یا مینیمیم یک تابع دو یا سه متغیره را تحت شرایط جانبی یا قیود وارد بر متغیرها بیابیم . مثلاً ، " در مثال ۱ ، صفحه ۳۲۳ ، بیشترین مساحت یک مزرعه^۱ مستطیلی محصور به حصار به طول 800 ft ، و در مثال ۶ ، صفحه ۱۲۹۵ ، کمترین چوب لازم برای ساختن یک جعبه^۲ مکعب مستطیل با حجم معلوم V را خواهیم . به بیان ریاضی ، اولین مسئله عبارت است از ماکزیمیم سازی تابع

$$(۱) \quad f(x, y) = xy$$

تحت قید

$$(۱') \quad 2(x + y) = 800,$$

و دومین مسئله عبارت است از مینیمیم سازی تابع

$$(۲) \quad f(x, y, z) = 2(xy + xz + yz)$$

تحت قید

$$(۲') \quad xyz = V.$$

روش ما برای پرداختن به این مسائل در هر دو حالت یکی بود . ابتدا معادله^۳ قید را نسبت به یکی از متغیرها و برحسب متغیر یا متغیرهای دیگر حل کرده ، در حالت معادله^۴ (۱') به دست می‌آوردیم $x = 400 - y$ و در حالت معادله^۵ (۲') به دست آوردیم $z = V/xy$. بعد ، با گذاردن این عبارات در (۱) و (۲) ، رابطه^۶ (۱) را به تابع

$$(۳) \quad f(x, 400 - x) = 400x - x^2$$

از متغیر x ، و رابطه^۷ (۲) را به تابع

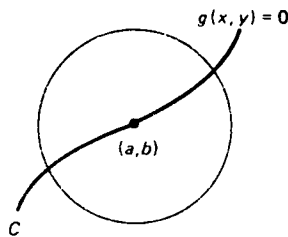
$$(۴) \quad f\left(x, y, \frac{V}{xy}\right) = 2\left(xy + \frac{V}{y} + \frac{V}{x}\right)$$

از دو متغیر x و y تحویل کردیم . سپس ، از قضیه^۸ اکسترممها برای ماکزیمیم سازی (۳) بر بازه^۹ $0 \leq x \leq 400$ و مینیمیم سازی (۴) بر ربع اول استفاده نمودیم . جزئیات در مثالهای ذکر شده شرح داده شده است .

اکسترممهای مقید . حال راه دیگری برای یافتن اکسترممهای مقید (یعنی ، اکسترممهایی که تحت شرایط جانبی یا قیودند) ارائه می‌دهیم که توسط ریاضیدان بزرگ فرانسوی ، ژوزف

لویی لاگرانژ (۱۸۱۳ - ۱۷۳۶)، کشف شده است و به روش ضرایب لاگرانژ معروف است. این روش دارای دو مزیت است. اولاً، در آن از پیچیدگیهای جبری در حل صریح معادله قید نسبت به یکی از متغیرها و برحسب سایرین دوری می‌شود. ثانیاً، در آن همه متغیرهای مسئله " یکسان " بوده و به هیچیک توجه خاصی نمی‌شود (مانند متغیر x در مثال اول یا متغیرهای x و y در مثال دوم فوق).

با آنکه روش ضرایب لاگرانژ را می‌توان برای توابع با بیش از سه متغیر و توابع تحت بیش از یک قید به کار برد، ما خود را به دو حالت که از همه ساده‌تر است، یعنی یافتن اکسترممهای تابع دو متغیره $f(x, y)$ تحت قید $g(x, y) = 0$ و یافتن اکسترممهای تابع سه متغیره $f(x, y, z)$ تحت قید $g(x, y, z) = 0$ محدود می‌کنیم^۱. در حالت اول فرض می‌کنیم نمودار $g(x, y) = 0$ منحنی مانند C در صفحه بوده، و در حالت دوم نمودار $g(x, y, z) = 0$ سطحی مانند S در فضا باشد. در این صورت، منظور از یک اکسترمم موضعی مقید $f(x, y)$ یا $f(x, y, z)$ در نقطه (a, b) از C یا نقطه (a, b, c) از S یعنی اکسترممی موضعی که در آن مقدار f در (a, b) یا (a, b, c) با تمام مقادیر f در نقاط مجاور مقایسه شده، بلکه فقط با مقادیر f بر C یا S واقعند مقایسه گردد؛ در اینجا فرض این است که (a, b) یک نقطه انتهایی منحنی C نبوده و (a, b, c) به " لبه " سطح S تعلق ندارد. در شکل ۲۰ این فرض در حالت دو متغیره، و در

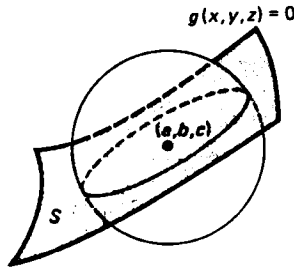


$f(x, y)$ در (a, b) مینیمم موضعی مقید دارد اگر به ازای هر نقطه^۲
 $f(a, b) \leq f(x, y)$ بر منحنی C داخل دایره‌ای به مرکز (a, b)

شکل ۲۰

شکل ۲۱ در حالت سه متغیره تعبیر هندسی شده است.

دو قضیه بسیار نزدیک به هم زیر طرز استعمال ضرایب لاگرانژ را در دو حالتی که هم‌اکنون مطرح شد کنترل می‌کنند. در هر یک از آنها ضریب لاگرانژ عددی است که معمولاً



$f(x, y, z)$ در (a, b, c) ماکزیمم موضعی مقید دارد اگر به ازای هر نقطه (x, y, z) بر سطح S داخل کره‌ای به مرکز (a, b, c) ، $f(a, b, c) \geq f(x, y, z)$.

شکل ۲۱

با λ (لامبدای کوچک یونانی) نموده می‌شود .

قاعده ضرایب لاگرانژ: حالت دو متغیره

قضیه ۸ (قاعده ضرایب لاگرانژ برای توابع دو متغیره) . فرض کنیم $f(x, y)$ و $g(x, y)$ بر مجموعه‌ای شامل منحنی C که نمودار معادله $g(x, y) = 0$ است مشتقات جزئی اول پیوسته داشته باشند . همچنین ، بر C ، $\nabla g(x, y) \neq 0$ ، و نیز $f(x, y)$ در نقطه (a, b) از C اکسترمم موضعی مقید داشته باشد . در این صورت ، عددی مانند λ هست به طوری که

$$\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b), \tag{۵}$$

یعنی ، گرادیانهای f و g در (a, b) موازی می‌باشند .

برهان (اختیاری) . چون بر C ، $\nabla g(x, y) \neq 0$ ، یا $g_x(x, y)$ یا $g_y(x, y)$ در هر نقطه از C ناصفر است ؛ در نتیجه $g_x(a, b) \neq 0$ یا $g_y(a, b) \neq 0$. به طور مشخص ، فرض کنیم $g_x(a, b) \neq 0$. پس ، طبق قضیه تابع ضمنی (صفحه ۱۲۵۹) ، بخشی از منحنی C که در (a, b) و مجاور آن است نمودار تابع به طور پیوسته مشتقپذیری مانند $y = y(x)$ می‌باشد . با گذاردن $y = y(x)$ در $f(x, y)$ و این فرض که $f(x, y)$ در (a, b) اکسترمم موضعی مقید دارد ، معلوم می‌شود که تابع مشتقپذیر $F(x) = f(x, y(x))$ یک متغیره باید در $x = a$ اکسترمم موضعی (به معنی عادی) داشته باشد . بنابراین ، $F'(a) = 0$ ، که در آن پریم مشتقگیری نسبت به x است ؛ در نتیجه با استفاده از قاعده زنجیره‌ای ،

$$F'(a) = f_x(a, b) + f_y(a, b)y'(a) = 0,$$

لذا ، $f_x(a, b) = 0$ اگر $f_y(a, b) \neq 0$ ، ولی

$$(۶) \quad y'(a) = -\frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)}$$

اگر $f_y(a, b) \neq 0$. در حالت اول $\nabla f = f_x i + f_y j = 0$ ، و (۵) به ازای $\lambda = 0$ برقرار است. در حالت دوم ، با مشتقگیری از اتحاد $g(x, y(x)) \equiv 0$ ، که در همسایگی $x = a$ برقرار است به دست می‌آوریم

$$g_x(a, b) + g_y(a, b)y'(a) = 0,$$

و در نتیجه ،

$$(۶*) \quad y'(a) = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}.$$

حال از مقایسهٔ (۶) با (۶*) نتیجه می‌شود که

$$f_x(a, b) = \frac{f_y(a, b)}{g_y(a, b)} g_x(a, b),$$

در نتیجه ، اگر $\lambda = f_y(a, b)/g_y(a, b)$ را اختیار کنیم ، انتخابی که معادل مساوی قرار دادن $f_y(a, b)$ با $\lambda g_y(a, b)$ است ، مجدداً (۵) برقرار می‌شود. برای تکمیل برهان ، ملاحظه می‌کنیم که اگر به جای $g_y(a, b) \neq 0$ فرض کنیم $g_x(a, b) \neq 0$ ، استدلال مشابهی قابل بیان است (با تعویض نقشهای x و y باهم ، جزئیات را شرح دهید) .

قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ : حالت سه متغیره

قضیهٔ ۹ (قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ برای توابع سه متغیره) . فرض کنیم $f(x, y, z)$ و $g(x, y, z)$ بر مجموعهٔ بازی شامل سطح S که نمودار معادلهٔ $g(x, y, z) = 0$ است مشتقات جزئی اول پیوسته داشته باشد . همچنین ، بر C ، $\nabla g(x, y, z) \neq 0$ ، و نیز $f(x, y, z)$ در نقطهٔ (a, b, c) از S اکستریم موضعی مقید داشته باشد . در این صورت ، عددی مانند λ هست به طوری که

$$(۷) \quad \nabla f(a, b, c) = \lambda \nabla g(a, b, c),$$

یعنی ، گرادیانهای f و g در (a, b, c) باهم موازیند .

برهان (اختیاری) . می‌توان برهانی مانند برهان قضیهٔ ۸ آورد ، ولی آموزنده‌تر آن است که به طور متفاوتی عمل کنیم . مثل صفحهٔ ۱۲۶۵ ، فرض کنیم C یک منحنی هموار بر S ماربر (a, b, c) به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (\alpha < t < \beta)$$

بوده ، و t_0 مقدار پارامتر t نظیر به نقطهٔ (a, b, c) باشد . همچنین ، $f(x, y, z)$ در (a, b, c)

اکسترم موضعی مقید داشته باشد. در این صورت، تابع مشتق‌پذیر $F(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ یک متغیره باید در $t = t_0$ اکسترم موضعی داشته باشد. بنابراین، $F'(t_0) = 0$ ، که در آن پریم مشتقگیری نسبت به t را نشان می‌دهد؛ لذا، با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$(۸) \quad F'(t_0) = f_x(a, b, c)x'(t_0) + f_y(a, b, c)y'(t_0) + f_z(a, b, c)z'(t_0) = 0.$$

همچنین، با مشتقگیری از اتحاد $0 \equiv g(x(t), y(t), z(t))$ ،

$$(۹) \quad g_x(a, b, c)x'(t_0) + g_y(a, b, c)y'(t_0) + g_z(a, b, c)z'(t_0) = 0.$$

فرض کنیم $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$. پس $\mathbf{r}'(t_0) = x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\mathbf{j} + z'(t_0)\mathbf{k}$ ، که در آن $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ ، زیرا منحنی C هموار می‌باشد (ر. ک. صفحه ۱۲۶۵). حال می‌توان (۸) و (۹) را به صورت

$$(۸') \quad \nabla f(a, b, c) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$$

و

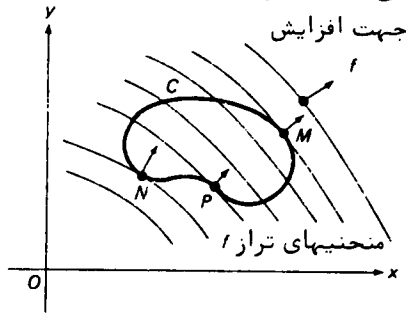
$$(۹') \quad \nabla g(a, b, c) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0,$$

برحسب حاصل‌ضربهای نقطه‌ای بردار $\mathbf{r}'(t_0)$ در گرادیانهای $\nabla f(a, b, c)$ و $\nabla g(a, b, c)$ نوشت. چون $\mathbf{r}'(t_0)$ در (a, b, c) بر منحنی C مماس است، $\nabla f(a, b, c)$ و $\nabla g(a, b, c)$ هر دو در (a, b, c) عمودند. اما C یک منحنی هموار دلخواه بر S است که از (a, b, c) می‌گذرد؛ و لذا، $\nabla f(a, b, c)$ و $\nabla g(a, b, c)$ هر دو باید در امتداد خط قائم به S در (a, b, c) قرار گیرد. لذا، بردارهای $\nabla f(a, b, c)$ و $\nabla g(a, b, c)$ در (a, b, c) موازیند، و فرمول (۷) ثابت می‌شود.

قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ (۷) تعبیر هندسی ساده‌ای دارد. بردار گرادیان $\nabla f(a, b, c)$ به سطح تراز $f(x, y, z) = f(a, b, c)$ در نقطهٔ (a, b, c) ، و $\nabla g(a, b, c)$ به سطح قیدی $g(x, y, z) = 0$ در (a, b, c) عمود است؛ در واقع، سطح قیدی سطح تراز $g(x, y, z) = c$ نظیر $g(x, y, z) = 0$ به c است. لذا، فرمول (۷) می‌گوید هرگاه $f(x, y, z)$ در (a, b, c) اکسترم موضعی مقید داشته باشد، آنگاه سطح تراز f مار بر (a, b, c) و سطح قیدی در (a, b, c) قائم مشترک، و در نتیجه صفحهٔ مماس مشترک، دارند. به همین نحو، قاعدهٔ دوبعدی ضرایب لاگرانژ (۵) می‌گوید هرگاه $f(x, y)$ در نقطهٔ (a, b) اکسترم موضعی مقید داشته باشد، آنگاه منحنی تراز f مار بر (a, b) و منحنی قیدی $g(x, y) = 0$ در (a, b) قائم مشترک، و در نتیجه خط مماس مشترک دارند.

نقاط (a, b) یا (a, b, c) واقع بر منحنی C یا سطح S که در آنها $\nabla f = \lambda \nabla g$ تنها نامزد نقاطی هستند که f در آنها اکسترم موضعی مقید دارد، و f ممکن است در چنین نقطه‌ای اکسترم موضعی مقید نداشته باشد؛ به عبارت دیگر، شرط $\nabla f = \lambda \nabla g$ برای اکسترم موضعی

مقید لازم است ولی کافی نیست. این امر در شکل ۲۲ شرح داده شده، که منحنیهای تراز تابع $f(x, y)$ را همراه با C که نمودار مقید $g(x, y) = 0$ است نشان می‌دهد. توجه کنید که سه نقطه M ، N ، و P وجود دارند که در آنها منحنی C و منحنی تراز نظیر f قوائم مشترک دارند، و اینها تنها نامزد نقاطی هستند که f در آنها اکسترم موضعی مقید دارد. با معاینه شکل معلوم می‌شود که اگرچه تابع f در M ماکزیمم موضعی مقید و در N مینیمم موضعی مقید دارد، در P اکسترم موضعی مقید ندارد.



شکل ۲۲

لذا، برای اثبات اکسترم موضعی مقید داشتن f در نقطه‌ای از C که $\nabla f = \lambda \nabla g$ ، و نیز تعیین آنکه اکسترم ماکزیمم یا مینیمم است، به تحلیل بیشتری نیاز داریم^۱. در این باب لازم است نکات زیر را در خاطر داشته باشیم.

(یک) هرگاه C مجموعه بسته^۲ کراندار بوده و f بر C پیوسته باشد، آنگاه، طبق قضیه^۳ ۵، صفحه ۷۹۱، f ، C اکسترمم مطلق دارد.

(دو) اگر f بر C اکسترمم مطلق نداشته و بر مجموعه^۴ بازی شامل C مشتقپذیر باشد، این اکسترممها یا اکسترممهای موضعی f اند، که در این صورت می‌توان آنها را با قاعده^۵ ضرایب لاگرانژ $\nabla f = \lambda \nabla g$ (مشروط بر اینکه $\nabla g \neq 0$) به دست آورد، یا در نقاط انتهایی C رخ می‌دهند.

(سه) در بسیاری از مسائل، به کمک نکاتی هندسی یا فیزیکی می‌توان نتیجه گرفت که f در نقطه‌ای که $\nabla f = \lambda \nabla g$ اکسترمم دارد.

تبصره. اگر مقید به شکل $g(x, y) = c$ یا $g(x, y, z) = c$ باشد که $c \neq 0$ ، باز می‌توان شرط لازم

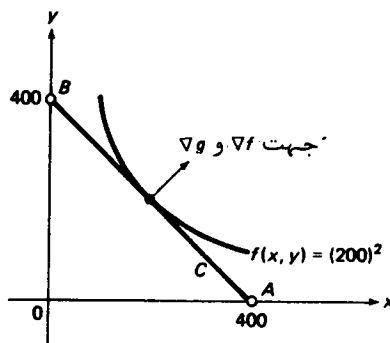
۱. در اینجا برای سادگی از منحنی C و تابع دومتغیره^۶ f حرف می‌زنیم ولی نکات مشابهی برای سطح S و تابع سه متغیره^۶ f نیز قابل بیانند.

برای اکسترمم موضعی مقید را به صورت $\nabla f = \lambda \nabla g$ نوشت، زیرا $\nabla(g - c) = \nabla g - \nabla c = \nabla g$.
 حالاتی وجود دارند که در آنها ضریب لاگرانژ λ صفر است. در این صورت، $\nabla f = \mathbf{0}$ ، ولی
 ترازوی ∇f و ∇g در (a, b) یا (a, b, c) برقراری می ماند، زیرا بردار صفر را موازی هر بردار گرفته ایم.
 همچنین، ممکن است یک اکسترمم موضعی مقید در نقطه ای رخ دهد که $\nabla g = \mathbf{0}$ ، زیرا این
 حالت در قاعده ضرایب لاگرانژ منظور نشده است.

برای توضیح روش ضرایب لاگرانژ، ابتدا راه حل های دیگری از دو مسئله مطرح شده
 در آغاز بخش را نشان داده و سپس، با استفاده از ضرایب لاگرانژ، چند مسئله نوعی در
 رابطه با اکسترممهای مقید را حل می کنیم.

مثال ۱. یک مزرعه مستطیلی با بیشترین مساحت را بیابید که بتوان دور آن را با 800 ft
 حصار کشید.

حل. فرض کنیم x عرض و y طول مزرعه باشد. ما ماکزیمم مطلق تابع مساحت $f(x, y) = xy$
 تحت قید $g(x, y) = 2(x + y) = 800$ را می خواهیم. در اینجا متغیرهای x و y ذاتاً "نامنفی"،
 و در واقع مثبت، اند زیرا انتخاب $x = 0$ یا $y = 0$ بی معنی است (این یعنی حصار را روی
 خودش تاکنیم، و برای مزرعه مساحت صفر حاصل می شود). لذا، قلمرو هر دو تابع f و g
 ربع اول Q صفحه xy است. فرض کنیم C نمودار معادله قید $g(x, y) = 800$ ($x > 0, y > 0$)
 باشد. همانطور که در شکل ۲۳ می بینیم، C پاره خطی است که نقاط $A = (400, 0)$ و $B = (0, 400)$
 را به هم وصل می کند ولی شامل آنها نیست. از تعبیر هندسی معلوم می شود که f بر C
 ماکزیمم مطلق دارد، زیرا اگر x و y کوچک بوده و نیز اگر x یا y تقریباً "مساوی 400 باشد،



شکل ۲۳

مزرعه باریک و مساحتی کوچک دارد. گرادپانه‌های f و g عبارتند از

$$\nabla f = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}, \quad \nabla g = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \neq \mathbf{0},$$

و در نتیجه، قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ $\nabla f = \lambda \nabla g$ به صورت $y\mathbf{i} + x\mathbf{j} = \lambda(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$ یا معادلاً

$$(10) \quad y = 2\lambda, \quad x = 2\lambda$$

درمی‌آید، که $y = x$ را ایجاب می‌کند. با گذاردن $y = x$ در قید $2(x + y) = 800$ معلوم می‌شود که $4x = 800$ یا $x = 200$. چون نقاط دیگری از C وجود ندارند که در آنها $\nabla f = \lambda \nabla g$ و C نقاط انتهایی ندارد، می‌توان مطمئن بود که $(200, 200)$ نقطه‌ای است که f در آن ماکزیمم مطلق خود بر C را می‌گیرد. لذا، مزرعهٔ مستطیلی به مساحت ماکزیمم محصور به حصار به طول 800 ft یک مزرعهٔ مربع به ضلع 200 ft و مساحت $40,000 \text{ sq. ft} = (200)^2$ است، که در مثال ۱، صفحهٔ ۳۲۳، به روشی دیگر به دست آمد. ما به این نتیجه بدون حل نسبت به خود ضریب λ ، که مستقیماً مورد توجه ما نیست، رسیدیم. با اینحال، از (۱۰) فوراً نتیجه می‌شود که $\lambda = x/2 = y/2 = 100$.

یک روش نسبتاً متفاوت برای حل مثال ۱ این است که فرض کنیم منحنی C نقاط انتهایی A و B خود را دربرداشته باشد، اگرچه این از دیدگاه سازندهٔ حصار اهمیت عملی ندارد. در این صورت، C یک مجموعهٔ بستهٔ کراندار است؛ در نتیجه، تابع پیوستهٔ f بر C هم ماکزیمم و هم مینیمم دارد. ماکزیمم f بر C در نقطهٔ $(200, 200)$ رخ می‌دهد که در آن قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ $\nabla f = \lambda \nabla g$ برقرار است، و مینیمم f بر C البته در نقاط انتهایی A و B است که f مقدار ۰ را می‌گیرد. توجه کنید که مینیمم f بر C را نمی‌توان با قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ کشف کرد زیرا، همانطور که به آسانی معلوم می‌شود، مقداری از λ وجود ندارد که در A یا B ، $\nabla f = \lambda \nabla g$ (در اینجا فرض می‌کنیم قلمرو f و g تمام صفحه باشد). لذا، در حالتی که C نقاط انتهایی دارد، باید رفتار f در نقاط انتهایی یک منحنی قیدی C جداگانه تحلیل گردد.

مثال ۲. کمترین مقدار تختهٔ لازم جهت ساختن یک جعبه مکعب مستطیل بسته به حجم معلوم V را بیابید.

حل. فرض کنیم x طول، y عرض، و z ارتفاع جعبه باشد. در این صورت، مینیمم مطلق تابع مساحت کل $f(x, y, z) = 2(xy + xz + yz)$ تحت قید $g(x, y, z) = xyz = V$ را می‌خواهیم چون متغیرهای x ، y ، و z ذاتاً مثبت‌اند (چرا؟)، قلمرو هر دو تابع f و g یکپشت

اول می‌باشند. با محاسبه گرادیانهای f و g ، خواهیم داشت

$$\nabla f = 2(y+z)\mathbf{i} + 2(x+z)\mathbf{j} + 2(x+y)\mathbf{k}$$

و

$$\nabla g = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k},$$

که در آن باید توجه داشت که بر قلمرو g ، $\nabla g \neq \mathbf{0}$. لذا، قاعده ضرایب لاگرانژ $\nabla f = \lambda \nabla g$ ایجاب می‌کند

$$2(y+z) = \lambda yz, \quad 2(x+z) = \lambda xz, \quad 2(x+y) = \lambda xy,$$

یا معادلا

$$(11) \quad \frac{1}{z} + \frac{1}{y} = \frac{\lambda}{2}, \quad \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{\lambda}{2}, \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{\lambda}{2}$$

(به یاد آورید که $x > 0, y > 0, z > 0$). از (11) فوراً نتیجه می‌شود که $x = y = z$ ، که نظیر به یک جعبه مکعبی می‌باشد. این جعبه باید یک مینیمم مطلق مقید f به دست دهد، زیرا جعبه‌های غیرمکعبی به حجم V وجود دارند که به مقدار چوب بدخواه زیاد نیاز دارند (نشان دهید که وقتی متغیرهای x, y, z ، و z تحت قید $xyz = V$ به 0 نزدیک شوند، $f(x, y, z) \rightarrow \infty$). به ازای $x = y = z$ ، قید به صورت $x^3 = V$ درمی‌آید؛ در نتیجه، $x = V^{1/3}$. لذا، کمترین چوب لازم برای ساختن جعبه‌ای به حجم V مساوی است با $f(V^{1/3}, V^{1/3}, V^{1/3}) = 6V^{2/3}$ ، و این در مثال ۶، صفحه ۱۲۹۰، به روشی دیگر به دست آمد، و جعبه باید مکعبی به ضلع $V^{1/3}$ باشد. مقدار λ که به ازای آن $\nabla f = \lambda \nabla g$ چقدر است؟

مثال ۳. اکستریمهای تابع $f(x, y) = x^2y$ را بر بیضی $2x^2 + y^2 = 3$ بررسی نمایید.

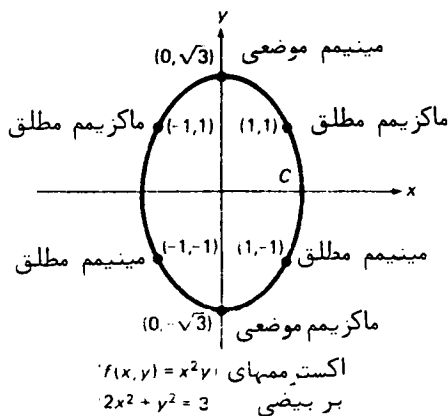
حل. در اینجا معادله قید عبارت است از $g(x, y) = 2x^2 + y^2 = 3$ ، و گرادیانهای f و g عبارتند از

$$\nabla f = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}, \quad \nabla g = 4x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j},$$

که در آن بر بیضی $\nabla g \neq \mathbf{0}$. لذا، قاعده ضرایب لاگرانژ $\nabla f = \lambda \nabla g$ نتیجه می‌دهد که

$$(12) \quad 2xy = 4\lambda x, \quad x^2 = 2\lambda y.$$

معادله اول به ما می‌گوید که $x = 0$ یا $x = \frac{1}{2}y$. اگر $x = 0$ ، قید به $y^2 = 3$ یا $y = \pm\sqrt{3}$ تبدیل می‌شود. اگر $x = \frac{1}{2}y$ ، معادله دوم (12) به صورت $x^2 = y^2$ یا $y = \pm x$ ، و قید به صورت $3x^2 = 3$ یا $x = \pm 1$ درمی‌آید. لذا، همانطور که شکل ۲۴ نشان می‌دهد، درست شش نقطه از بیضی $2x^2 + y^2 = 3$ وجود دارند که در آنها $\nabla f = \lambda \nabla g$ ؛ یعنی،



شکل ۲۴

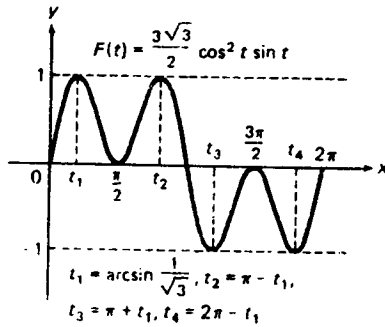
نقاط $(0, \pm\sqrt{3})$ ، $(\pm 1, 1)$ ، و $(\pm 1, -1)$ بیضی، که آن را با C نشان می‌دهیم، یک مجموعه بسته کراندار بوده و f بر C پیوسته است. لذا، f بر C اکسترمم مطلق دارد. چون $f(0, \pm\sqrt{3}) = 0$ ، $f(\pm 1, 1) = 1$ ، و $f(\pm 1, -1) = -1$ ، ماکزیمم مطلق f بر C مساوی 1 است که در $(\pm 1, 1)$ گرفته می‌شود، و مینیمم مطلق f بر C مساوی -1 است که در $(\pm 1, -1)$ گرفته می‌شود. در مورد نقاط $(0, \pm\sqrt{3})$ ، f در $(0, \sqrt{3})$ مینیمم موضعی مقید و در $(0, -\sqrt{3})$ ماکزیمم موضعی مقید دارد. این مطلب از این نتیجه می‌شود که f صفر است اگر $x = 0$ ، ولی مثبت است اگر $x \neq 0$ ، $y > 0$ و منفی است اگر $x \neq 0$ ، $y < 0$. به آسانی معلوم می‌شود که $\lambda = 0$ مقدار λ است که در نقاط $(0, \pm\sqrt{3})$ ، $\nabla f = \lambda \nabla g$ با معرفی معادلات پارامتری

$$x = \sqrt{\frac{3}{2}} \cos t, \quad y = \sqrt{3} \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

برای بیضی C که، وقتی t از 0 تا 2π افزایش می‌یابد، C یکبار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود، اطلاعات بیشتری از مسئله فوق به دست می‌آید. در این صورت، مقدار $f(x, y) = x^2 y$ در نقطه‌ای از C به پارامتر t از تابع زیر به دست می‌آید:

$$F(t) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cos^2 t \sin t.$$

نمودار $F(t)$ در شکل ۲۵ نموده شده است، و با رفتار $f(x, y)$ به دست آمده به روش ضرایب لاگرانژ سازگاری کامل دارد.



شکل ۲۵

مثال ۴. نقطه‌ای از سهمی گون دوار $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) - 2$ را بیابید که از همه به نقطه $(0, 1, 0)$ نزدیکتر باشد.

حل. چون مجذور فاصله نقطه $(0, 1, 0)$ تا نقطه متغیر (x, y, z) از سهمی گون $x^2 + (y - 1)^2 + z^2$ است، مینیمم مطلق تابع

$$f(x, y, z) = x^2 + (y - 1)^2 + z^2$$

را تحت قید

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z = 8$$

جستجو می‌کنیم (اگر مجذور فاصله مینیمم شود، خود فاصله نیز شده است). با گرفتن گرادیان، داریم

$$\nabla f = 2x\mathbf{i} + 2(y - 1)\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}, \quad \nabla g = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 4\mathbf{k} \neq \mathbf{0},$$

در نتیجه، قاعده ضرایب لاگرانژ $\nabla f = \lambda \nabla g$ نتیجه می‌دهد که

$$2x = 2\lambda x, \quad 2(y - 1) = 2\lambda y, \quad 2z = -4\lambda.$$

پس از معادله اول داریم $x = 0$ یا $\lambda = 1$. اما اگر $\lambda = 1$ ، معادله دوم به صورت $0 = -2$

درمی‌آید که بی‌معنی است؛ و در نتیجه، $x = 0$ (توجه کنید که به همین دلیل $y \neq 0$).

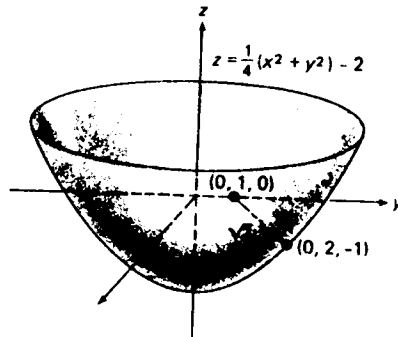
با حذف λ از معادلات دوم و سوم، به دست می‌آوریم

$$(۱۳) \quad z = -\frac{2(y - 1)}{y}$$

با گذاردن $x = 0$ و فرمول (۱۳) در معادله قید، خواهیم داشت

$$y^2 - 4z = y^2 + \frac{8(y - 1)}{y} = 8,$$

که $y = 2$ را ایجاب می‌کند، و در این صورت (۱۳) نتیجه می‌دهد که $z = -1$. بنابراین، $(0, 2, -1)$ تنها نقطه صادق در شرط $\nabla f = \lambda \nabla g$ می‌باشد. از دید هندسه واضح است که f بر سهمی‌گون مینیمم دارد ولی ماکزیمم ندارد. لذا، مینیمم باید در $(0, 2, -1)$ باشد، و این نقطه‌ای از سهمی‌گون است که از همه به نقطه $(0, 1, 0)$ نزدیکتر بوده و در فاصله $\sqrt{f(0, 2, -1)} = \sqrt{2}$ از آن قرار دارد (ر. ک. شکل ۲۶).



شکل ۲۶

مسائل

با استفاده از ضرایب لاگرانژ، اکسترممهای تابع f را تحت قید داده شده پیدا نمایید.

۱. $f(x, y) = 3x - 2y + 1, 9x^2 + 4y^2 = 18$

۲. $f(x, y) = xy, 3x + 2y - 36 = 0$

۳. $f(x, y) = x^2 - y^2, xy = 1$

۴. $f(x, y) = x^2 + y^2, x^4 + y^4 = 2$

۵. $f(x, y) = x^2 + 8y^2, \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

۶. $f(x, y) = x^2y^2, x^2 + y^2 = 1$

۷. $f(x, y) = x^2 + y^2, x^2 - y^2 = 1$

۸. $f(x, y) = x^2 + y^2, (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 8$

۹. $f(x, y, z) = 2x - 3y + z - 1, x^2 + y^2 + z^2 = 14$

۱۰. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, x - 2y + 2z = 6$

۱۱. $f(x, y, z) = \frac{1}{8}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{6}z, xyz = 1$ (x, y, z مثبت)

۱۲. $f(x, y, z) = x - y + z, 4x^2 + y^2 + 9z^2 = 49$

۱۳. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, 2x^2 + y^2 - z^2 = 2$

۱۴. $f(x, y, z) = xy + xz, x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 4$

با استفاده از ضرایب لاگرانژ، فاصله بین

۱۵. نقطه $(-1, 4)$ و خط $12x - 5y + 71 = 0$

۱۶. نقطه $(1, 1, 1)$ و صفحه $2x + 6y - 9z + 12 = 0$

را بیابید.

۱۷. نقطه‌ای از سهمی $(y - 1)^2 = 4x$ را بیابید که از همه به نقطه $(2, 0)$ نزدیکتر باشد.

۱۸. نقاطی از هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ را بیابید که از همه به نقطه $(0, 4)$ نزدیکتر باشند.

۱۹. نقطه‌ای از سهمی $y = \frac{1}{4}x^2$ را بیابید که از همه به خط $x - y - 4 = 0$ نزدیکتر باشد.

۲۰. نقاطی از بیضی $4x^2 + y^2 = 4$ را بیابید که از همه به خط $3x - 2y + 6 = 0$ نزدیکتر

یا دورتر باشند.

۲۱. مینیم تابع $f(x, y) = x^2 + (y + 1)^2$ را تحت قید $g(x, y) = x^2 - y^3 = 0$ تعیین نمایید.

آیا قاعده ضرایب لاگرانژ در این مسئله قابل اعمال است؟ جواب خود را توضیح

دهید.

۲۲. با استفاده از قاعده ضرایب لاگرانژ، محورهای بیضی چرخیده $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2 = 0$

را بیابید. بیضی را رسم کنید.

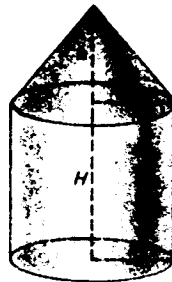
راهنمایی. نقاطی از بیضی را بیابید که از مبدأ دورترین و نزدیکترین باشند.

۲۳. چادری است به شکل یک استوانه مستدیر قائم به ارتفاع H که رویش مخروطی به

ارتفاع h با همان شعاع r قرار دارد (ر. ک. شکل ۲۷). حجم چادر قبلاً تعیین

شده است. چه رابطه‌ای باید بین ابعاد چادر وجود داشته باشد که مقدار پارچه لازم

برای ساختن آن مینیمم شود؟



شکل ۲۷

۲۴. چوب لازم برای ساختن وجوه یک جعبه مکعب مستطیل بسته هر فوت مربع $\$1.00$

قیمت دارد، حال آنکه قیمت بالا و پایین آن فوت مربعی $\$1.50$ می‌باشد. حجم جعبه

12 فوت مکعب می‌باشد. ابعادی از جعبه را بیابید که هزینه ساختن را مینیمم سازد، و هزینه مینیمم چقدر است؟
با استفاده از ضرایب لاگرانژ،

۲۶. مسئله ۱، صفحه ۳۳۶
۲۷. مسئله ۳، صفحه ۳۳۶
۲۸. مسئله ۲۵، صفحه ۱۲۹۴
۲۹. مسئله ۲۶، صفحه ۱۲۹۴
۳۰. مسئله ۲۷، صفحه ۱۲۹۴

را حل نمایید.

۳۱. می‌توان نشان داد که هرگاه $f(x, y, z)$ در (a, b, c) تحت دو قید $g(x, y, z) = 0$ و $h(x, y, z) = 0$ اکسترم موضعی داشته و گرادیانهای $\nabla g(a, b, c)$ و $\nabla h(a, b, c)$ ناصفر و ناموازی باشند، آنگاه دو عدد مانند λ و μ ، به نام ضرایب لاگرانژ، وجود دارند به طوری که

$$\nabla f(a, b, c) = \lambda \nabla g(a, b, c) + \mu \nabla h(a, b, c)$$

، f ، g ، و h مشتقات جزئی اول پیوسته دارند. با استفاده از این تعمیم قضیه ۹، اکسترمهای تابع $f(x, y, z) = 2x - y + 3z$ تحت قیود $x^2 + y^2 = 5$ و $y + z = 4$ را بیابید.

۳۲. با استفاده از روش مسئله قبل، فاصله بین مبدا و فصل مشترک صفحات $x + 2y - z - 5 = 0$ و $x - y + z - 3 = 0$ را بیابید. جواب را به روشی دیگر امتحان نمایید.

اصطلاحات و مباحث کلیدی

توابع چند متغیره
فضای R^n از نقاط (x_1, x_2, \dots, x_n)
منحنیها و سطوح تراز
حدود و پیوستگی توابع n متغیره
نقاط درونی و نقاط مرزی
مجموعه‌های باز و بسته، پیوستگی بر یک مجموعه
مشتقات جزئی مرتبه اول و بالاتر
مشتقگیری از یک تابع دو یا چند متغیره
نتایج مشتقگیری
تقریب به وسیله دیفرانسیلها
قاعده زنجیره‌ای برای توابع چندمتغیره
مشتقگیری ضمنی و قضیه تابع ضمنی
صفحه مماس و خط قائم به یک سطح

تقریب صفحه مماس
 مشتق جهتی و گرادیان
 اکسترمهای مطلق و موضعی توابع چندمتغیره
 نقاط بحرانی و نقاط زینی
 آزمون جزئیهای دوم
 اکسترمهای مقید و ضرایب لاگرانژ

مسائل تکمیلی

۱. تابع پیوسته $f(x, y)$ تعریف شده بر تمام صفحه xy را طوری بیابید که مقادیرش در 16 نقطه (m, n) به مختصات صحیح $m, n = 0, 1, 2, 3$ مقادیر جدول زیر باشند:

$y \backslash x$	0	1	2	3
0	1	3	5	7
1	-2	0	2	4
2	-5	-3	-1	1
3	-8	-6	-4	-2

۲. مقدار تابع

$$f(x, y) = \frac{\arctan(x - y)}{\arctan(x + y)}$$

را در نقطه $(\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1), \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1))$ بیابید.

۳. مساحت A ی یک مثلث را به صورت تابعی از طول اضلاع x, y, z بیان دارید.
 ۴. یک مثلث قائم الزاویه به طول اضلاع x و y در دایره‌ای به شعاع R محاط شده است. فرض کنید $A = f(x, y)$ مساحت مثلث باشد. قلمرو و برد f چیست؟

قلمرو (طبیعی) تابع داده شده را توصیف نمایید.

$$z = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - y^2} \quad .5$$

$$z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{9 - y^2} \quad .6$$

$$z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)} \quad .7$$

$$z = \arcsin(y/x) \quad .8$$

$$u = \frac{1}{\ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)} \quad .9$$

$$u = \sqrt{x + y + z - 1} \quad .10$$

۱۱. فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{4x^2 + y^2} & , x < 0 \\ |y| & , x \geq 0 \end{cases}$$

منحنیهای تراز c را برای $f(x, y) = c$ به ازای $c = 0, 2, 4$ رسم کنید.

۱۲. سطوح تراز تابع $f(x, y, z) = 10^{2x+3y-z}$ را توصیف کنید.

حدود زیر را محاسبه نمایید.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2} \quad . ۱۴$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} \quad . ۱۳$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \quad . ۱۶$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{2x + y}{x^2 + y^2} \quad . ۱۵$$

۱۷. مجموعه‌ای مثال بزنید که هم باز و هم بسته باشد.

۱۸. مرز قلمرو طبیعی تابع $f(x, y) = \cot \pi(x^2 + y^2)$ چیست؟

تمام مشتقات جزئی اول تابع داده شده را بیابید.

$$f(x, y) = e^{(x+y)^2} \quad . ۲۰ \qquad f(x, y) = e^{x^2+y^3} \quad . ۱۹$$

$$f(x, y) = (1 + xy)^x \quad . ۲۲ \qquad f(x, y) = x^{xy} \quad . ۲۱$$

$$f(x, y, z) = (x - y)(x - z)(y - z) \quad . ۲۳$$

$$g(x, y, z) = x^{yz} \quad . ۲۵ \qquad f(x, y, z) = \arctan(xy/z) \quad . ۲۴$$

$$h(x, y, z) = xy^2z^3 \cosh xyz \quad . ۲۶$$

۲۷. f_{yyx} و f_{xxy} را برای تابع مسئله ۲۳ بیابید.

۲۸. مستقیماً "تحقیق کنید که اگر $z = \cos xy$ ، $z_{xxy} = z_{yxx}$."

۲۹. صفحه $x = 2$ سطوح $z = \frac{1}{3}(x^2 + y^2)$ و $z = \frac{1}{6}(x^2 + y^2)$ را در یک جفت منحنی قطع می‌کند.

این منحنیها در چه زاویه‌ی حادثه‌ای متقاطعند؟

۳۰. نشان دهید که تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & , x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & , x = y = 0 \end{cases}$$

در هر نقطه از صفحه مشتق جزئی دارد، ولی در مبدأ ناپیوسته است.

۳۱. نشان دهید هرگاه $f(x, y)$ در همسایگی نقطه (a, b) مشتقات جزئی گراندار داشته باشد،

آنگاه $f(x, y)$ در (a, b) پیوسته است. نشان دهید که این با مسئله قبل سازگار است.

۳۲. نشان دهید که تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , x^2 + y^2 \neq 0 \text{ اگر} \\ 0 & , x = y = 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

در مبدأ پیوسته بوده و مشتقات جزئی دارد، ولی در آن مشتقپذیر نیست. نشان دهید این با قضیه ۲، صفحه ۱۲۴۷، سازگار است.

۳۳. دیفرانسیل کل

$$f(x, y) = \arctan \frac{x - y}{x + y}$$

را بیابید.

۳۴. دو ضلع یک مثلث به طولهای $x = 10 \text{ cm}$ و $y = 20 \text{ cm}$ بوده، و زاویه θ ی بین آنها 60° می باشد. تغییر مساحت مثلث را در صورتی تخمین بزنید که x و y هر دو به اندازه 4 mm افزایش یافته و θ به اندازه 1° کاهش یابد. همچنین، تغییر طول ضلع سوم مثلث را تخمین بزنید.

۳۵. $(3.01/11.98)^{0.49}$ را با استفاده از دیفرانسیلها تخمین بزنید.

۳۶. نشان دهید که معادله لاپلاس $u_{xx} + u_{yy} = 0$ به وسیله تابع $u = \arctan(y/x)$ برقرار است ولی به وسیله تابع $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ چنین نیست.

۳۷. فرض کنید $u = f(x^2 + y^2)$ ، که در آن f یک تابع مشتقپذیر با مشتق f' باشد. نشان دهید که

$$y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

با استفاده از قاعده زنجیره‌ای، dw/dt را در صورتی بیابید که

$$w = x_1 x_2 \cdots x_n, x_1 = x_2 = \cdots = x_n = t \quad ۳۸$$

$$w = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}, x_1 = x_2 = \cdots = x_n = t > 0 \quad ۳۹$$

$$w = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2, x_1 = t, x_2 = -t, \dots, x_n = (-1)^{n-1} t \quad ۴۰$$

$$w = \ln(rstu) \text{ و } \partial w / \partial y \text{ را در صورتی بیابید که} \quad ۴۱$$

$$r = x - y, s = x + y, t = x^2 + y^2, u = x^4 + y^4.$$

۴۲. قواعد حاصل ضرب و خارج قسمت برای مشتقگیری معمولی را با اعمال قاعده زنجیره‌ای

دو متغیره در مورد توابع $u(x, y) = xy$ و $v(x, y) = x/y$ ، که در آنها $x = x(t)$ و $y = y(t)$

اثبات نمایید.

۴۳. فرض کنید $u = (1/x)[f(x+y) + g(x-y)]$ ، که در آن f و g توابع دلخواهی از یک

متغیر با مشتقات دوم "f" و "g" می‌باشند. نشان دهید که

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

۴۴. تابع همگن $f(x, y)$ را طوری مثال بزنید که از درجه π باشد (ر.ک. مسئله ۲۹، صفحه ۱۲۶۲).

۴۵. نشان دهید هرگاه $f(x, y)$ همگن از درجه n بوده و دارای مشتقات جزئی دوم پیوسته باشد، آنگاه

$$x^2 f_{xx}(x, y) + 2xy f_{xy}(x, y) + y^2 f_{yy}(x, y) = n(n-1)f(x, y) \quad (\text{یک})$$

۴۶. نشان دهید که $f(x, y) = x^2 y \arctan(x/y)$ همگن از درجه ۳ است، و تحقیق کنید که در فرمول (یک) صدق می‌کند.

۴۷. آیا مساحت یک مستطیل می‌تواند همزمان با کاهش طول قطر آن افزایش یابد؟

۴۸. دو ضلع مساوی یک مثلث متساوی‌الساقین در لحظه t_0 به طول 50 cm بوده و طول l آنها به میزان 2.5 cm/sec افزایش می‌یابد، درحالی که زاویه θ بین اضلاعش 45° است. سرعت کاهش θ در t_0 را در صورتی بیابید که میزان تغییر مساحت مثلث در t_0 صفر باشد.

۴۹. فرض کنید $u = u(x, y)$ و $v = v(x, y)$ در معادلات کشی - ریمان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

و تبدیل از مختصات قطبی به قائم باشد. یک جفت معادله

$$\frac{\partial u}{\partial r}, \quad \frac{\partial v}{\partial r}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

بیابید که در آنها صدق نمایند.

۵۰. نشان دهید که تابع

$$u = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^m \quad (m \neq 0, n > 2)$$

در صورت n بعدی معادله لاپلاس، یعنی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

صدق می‌کند اگر و فقط اگر $m = 1 - (n/2)$.

۵۱. بیضی $16x^2 + 9y^2 + z^2 = 144$ هشت صفحه عماس دارد که در آنها هر سه قطع

دارای قدرمطلق یکسانند. این صفحات را پیدا کنید.

۵۲. زاویه بین دو سطح در نقطه اشتراک P زاویه بین صفحات مماس بر سطوح در P

تعریف می‌شود. زاویه بین استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و کره $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ را در

نقطه $(1, 0, 1)$ و در نقطه $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}, 0)$ بیابید.

$u_x = \partial u / \partial x$ ، $u_y = \partial u / \partial y$ ، $u_z = \partial u / \partial z$ را با مشتقگیری ضمنی از معادله داده شده حساب کنید .

$$x^2y^2 - 3xyz + z^2u^2 = 2 \quad \cdot 53$$

$$u^3 - u \cos xyz = 0 \quad \cdot 54$$

$$e^{xyz} = zu \quad \cdot 55$$

$$\sinh(x + y + u) + \cosh(x + z - u) = 2 \quad \cdot 56$$

۵۷. مشتق جهتی تابع $f(x, y) = e^{\sin(x-y)}$ را در نقطه $(1, 1)$ و در جهت بردار $\mathbf{a} = 8\mathbf{i} - 15\mathbf{j}$ بیابید .

۵۸. مشتق جهتی تابع

$$f(x, y, z) = \cosh(x + y + z)$$

را در نقطه $(\ln 2, 1, -1)$ و در جهت بردار $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ بیابید .

۵۹. زاویه بین بردارهای گرادیان $\nabla f(3, 5)$ و $\nabla f(5, 13)$ را در صورتی بیابید که $f(x, y) = \arcsin(x/y)$

۶۰. نشان دهید که مشتق جهتی تابع $f(x, y) = x^2/y$ در هر نقطه از بیضی $x^2 + 2y^2 = 1$ و در جهت قائم به بیضی صفر است .

۶۱. میزان افزایش ماکزیمم تابع $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ در نقطه $(-3, 5, -1)$ چقدر است و در چه جهتی رخ می دهد؟

۶۲. نشان دهید که تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & , y \geq x^2 \text{ یا } y \leq 0 \\ 1 & , 0 < y < x^2 \end{cases} \text{ اگر}$$

در هر جهت در مبدأ 0 مشتق جهتی دارد ، ولی در 0 مشتقپذیر نیست .

تمام نقاط بحرانی تابع داده شده را بیابید . سپس تعیین کنید هر نقطه بحرانی ماکزیمم موضعی ، مینیمم موضعی ، یا نقطه زینی است .

$$f(x, y) = |x| + |y| \quad \cdot 63$$

$$f(x, y) = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} \quad (x > -1, y > -1) \quad \cdot 64$$

$$f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y) \quad (0 < x < \pi/2, 0 < y < \pi/2) \quad \cdot 65$$

$$f(x, y) = (2x + y^2)e^x \quad \cdot 66$$

$$f(x, y) = e^{x^2} - 3y^2 \quad \cdot 67$$

۶۸. اکستریمهای مطلق تابع $f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ را بر ناحیه مثلثی

$$R = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\pi\}$$
 پیدا نمایید .

۶۹. بیشترین حجم یک جعبه مکعب مستطیل را بیابید که قطرش به طول $\sqrt{3}a$ باشد .

۷۰. بیشترین حجم یک جعبه مکعب مستطیل را بیابید که مجموع طول اضلاعش $12a$ باشد.

۷۱. مثلثی با بیشترین مساحت بیابید که محیطش $2c$ باشد.

۷۲. مثلثی با بیشترین مساحت بیابید که قابل محاط در دایره‌ای به شعاع r باشد.

۷۳. نشان دهید هرگاه تابع $f(x, y)$ یا $f(x, y, z)$ اکسترممی موضعی تحت قید $g(x, y) = 0$ یا

$g(x, y, z) = 0$ در نقطه (a, b) یا (a, b, c) داشته باشد، آنگاه تابع $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y, z)$

از سه متغیر x, y, z و λ یا تابع $F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$ از چهار

متغیر x, y, z, λ یک اکسترمم موضعی نامقید در (a, b, λ) یا (a, b, c, λ) به ازای λ ای

خواهد داشت. این راهی دیگر ولی "کاملاً" معادل با روش ضرایب لاگرانژ به ما

می‌دهد.

۷۴. فرض کنید یک شرکت دو نوع کالای Q_1 و Q_2 تولید می‌کند. پس هزینه کل تولید q_1

واحد از Q_1 و q_2 واحد از Q_2 تسابعی از q_1 و q_2 است که تابع هزینه نام داشته و بسا

$C(q_1, q_2)$ نموده می‌شود. دو هزینه حاشیه‌ای نیز وجود دارند، $MC_1(q_1, q_2) = \partial C(q_1, q_2) / \partial q_1$

هزینه حاشیه‌ای کالای اول Q_1 ، و $MC_2(q_1, q_2) = \partial C(q_1, q_2) / \partial q_2$ هزینه حاشیه‌ای

کالای دوم Q_2 . (این چیزی جز تعمیم طبیعی نکات بخش ۸.۳ به یک شرکت دوکالایی

نیست.) فرض کنید تابع هزینه شرکت عبارت باشد از

$$C(q_1, q_2) = 3q_1^2 + 2q_1q_2 + 3q_2^2.$$

هزینه‌های حاشیه‌ای $MC_1(q_1, q_2)$ و $MC_2(q_1, q_2)$ را بیابید. همچنین، فرض کنید کالاهای

Q_1 و Q_2 به ترتیب هر دانه $p_1 = \$480$ و $p_2 = \$720$ فروخته شوند. عبارتی برای سود

شرکت $P(q_1, q_2)$ که اینجا یک تابع دو متغیره است، بنویسید. چه سطح تولیدی از

دو کالا سود را ماکزیم می‌سازد و این سود ماکزیم چقدر است؟

۷۵. در مسئله قبل فرض کنید سود تحت قید $q_1 + q_2 = 120$ ماکزیم گردد. مثلاً، یک

سازنده ممکن است بخواهد 120 صندلی دسته‌دار و کاناپه در مدتی معلوم بسازد. چه

سطح تولیدی سود را در این حالت ماکزیم می‌سازد، و این سود ماکزیم چقدر است؟

۷۶. در نظریه اقتصاد، میزان رضایت یا منفعت یک مشتری سودمندی نامیده می‌شود.

فرض کنید $U(q_1, q_2)$ سودمندی یک مشتری در به دست آوردن q_1 واحد از کالای Q_1 و

q_2 واحد از کالای دیگر Q_2 بوده، و مشتری M مقدار پول صرف خرید دو کالا نماید.

در این صورت، خریدهای مشتری تحت قید بودجه $p_1q_1 + p_2q_2 = M$ است، که در

آن p_1 و p_2 بهای هر واحد از کالاهای Q_1 و Q_2 می‌باشند. به کمک ضریب لاگرانژ λ ،

نشان دهید که سودمندی مشتری در نقطه (q_1, q_2) که

$$\frac{\partial U / \partial q_1}{p_1} = \frac{\partial U / \partial q_2}{p_2} = \lambda$$

ماکزیمم است، که در آن مشتقات جزئی $\partial U / \partial q_1$ و $\partial U / \partial q_2$ به ترتیب سودمندی حاشیه‌ای کالاها Q_1 و Q_2 نامیده می‌شوند. لذا، شرط ماکزیمم‌سازی سودمندی این است که نسبت سودمندی حاشیه‌ای به بها برای هر دو کالا یکی باشد. با بررسی نحوه بستگی مقدار ماکزیمم U به M ، ضریب لاگرانژ λ را تعبیر اقتصادی کنید. مقادیر q_1 و q_2 ای که سودمندی را ماکزیمم می‌سازند بیابید، و نیز اگر $U(q_1, q_2) = q_1 q_2$ ، $p_1 = \$10$ ، $p_2 = \$5$ و $M = \$300$ ، مقدار نظیر λ را پیدا نمایید.

۷۷. بیشترین حجم یک جعبه مکعب مستطیل بسته به مساحت 16 sq. ft که مجموع اضلاعش 20 ft باشد چقدر است؟

انتگرالگیری چندگانه^{۱۴}

در این فصل به حساب انتگرال توابع دو و چندمتغیره می‌پردازیم. برای احتراز از قلمرو حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته که در آن همین مباحث از دیدگاه دقیقتری بررسی می‌شوند، ما توجه خود را معطوف مسائل ملموسی از هندسه، فیزیک، و مهندسی می‌کنیم. در واقع، حل این‌گونه مسائل بود که پایه‌گذاران حساب دیفرانسیل و انتگرال را ملزم به طرح انتگرالهای چندگانه ساخت.

۱۰.۱۴ انتگرالهای مضاعف

در فصل ۴ مفهوم انتگرال معین یک تابع یک متغیره معرفی شد. مفهوم مشابه برای یک تابع چند متغیره *انتگرال چندگانه* است. بحث را با انتگرال یک تابع دو متغیره، به نام *انتگرال مضاعف*، شروع می‌کنیم. در اینجا به جای تابع $f(x)$ تعریف شده بر بازه بسته $[a, b]$ ، تابع $f(x, y)$ را در نظر می‌گیریم که بر ناحیه *انتگرالگیری* مناسبی چون R تعریف شده است. ولی نواحی دوبعدی، به خلاف بازه‌های یک‌بعدی، می‌توانند مجموعه‌های بسیار پیچیده‌ای باشند. در واقع، مرز ناحیه R ممکن است آنقدر نامنتظم باشد که نتوان به R مساحت تعریف شده‌ای نسبت داد؛ و در نتیجه، R نامزد مناسبی برای ناحیه *انتگرالگیری* نیست. لذا، از اول خود را به رده خاصی از ناحیه‌ها، به نام *نرمال* (یعنی، فارغ از "عیب") محدود می‌کنیم. این نواحی همه مساحت دارند، و به علاوه رده آنقدر وسیع است که تمام نواحی موجود در کاربردهای عملی حساب دیفرانسیل و انتگرال را دربر دارد. حال به چند تعریف مقتضی می‌پردازیم.

مجموعه تمام نقاط (x, y) صادق در نامساویهای

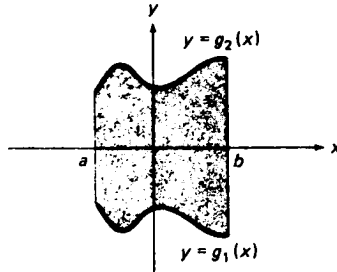
$$(1) \quad a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x),$$

را که در آن توابع g_1 و g_2 بر بازه $[a, b]$ پیوسته‌اند، یک ناحیه به‌طور قائم ساده می‌نامند،

ولی مجموعه تمام نقاط (x, y) صادق در نامساویهای

$$(۱) \quad c \leq y \leq d, \quad h_1(y) \leq x \leq h_2(y),$$

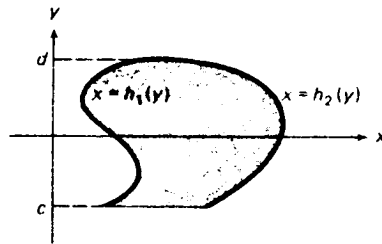
که در آنها توابع h_1 و h_2 بر بازه $[c, d]$ پیوسته‌اند، یک ناحیه به طور افقی ساده نام دارد. مثلاً، ناحیه شکل ۱ به طور قائم ساده است، ولی ناحیه شکل ۲ به طور افقی ساده است.



یک ناحیه به طور قائم ساده

شکل ۱

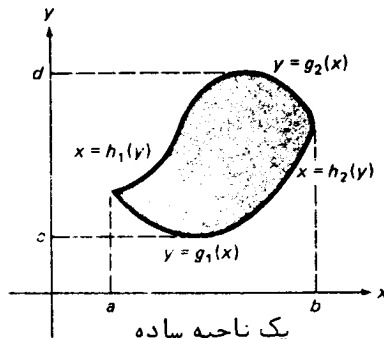
منظور از ناحیه ساده یعنی ناحیه‌ای که هم به طور قائم ساده باشد هم به طور افقی. یک



یک ناحیه به طور افقی ساده

شکل ۲

چنین ناحیه در شکل ۳ نموده شده است. بالاخره، منظور از ناحیه نرمال یعنی یک ناحیه

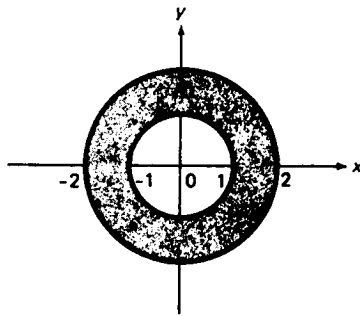


یک ناحیه ساده

شکل ۳

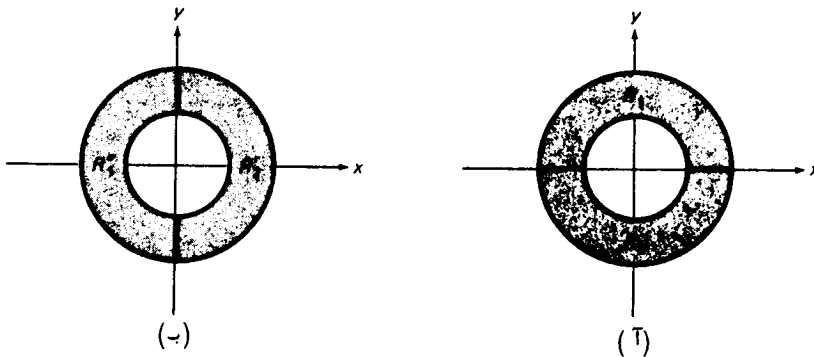
بسته کراندار که بتوان آن را به وسیله رسم خطوط مناسبی موازی محورهای مختصات به تعدادی متناهی زیر ناحیه که هر یک به طور قائم یا افقی ساده اند (یا هر دو) تقسیم کرد (زیر ناحیه‌های مجاور مرزهای مشترک دارند). طبیعی است که یک ناحیه به طور قائم یا افقی ساده را نرمال می‌گیریم.

مثال ۱. ناحیه طوقی $R = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ شکل ۴ نه به طور افقی و نه به طور قائم ساده نیست. اما R نرمال است. در واقع، محور x ، R را به زیر ناحیه‌های به طور قائم ساده



شکل ۴

R_1 و R_2 مثل شکل ۵ (آ)، تقسیم می‌کند، و نیز محور y ، R را به زیر ناحیه‌های به طور افقی ساده R'_1 و R'_2 ، مثل شکل ۵ (ب)، تقسیم خواهد کرد.



شکل ۵

این نواحی همه مساحت دارند که به آسانی حساب می‌شود. مساحت ناحیه به طور قائم ساده تعریف شده با نامساویهای (۱) مساحت بین منحنی بالایی $y = g_2(x)$ و منحنی

پایینی $y = g_1(x)$ از a تا b است که ، بنا بر صفحه ۳۸۷ ، مساوی است با

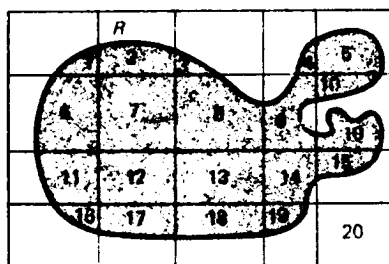
$$(۲) \quad A = \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)] dx,$$

ولی مساحت ناحیه به طور افقی سادهء تعریف شده با نامساویهای (۱') مساحت بین منحنی سمت راست $x = h_2(y)$ و منحنی سمت چپ $x = h_1(y)$ از c تا d است که ، بنا بر صفحه ۴۱۳ ، برابر است با

$$(۲') \quad A = \int_c^d [h_2(y) - h_1(y)] dy,$$

اگر ناحیه ساده باشد ، مساحتش از هر یک از فرمولهای (۲) و (۲') به دست می آید ، زیرا هر دو به کار می روند . بالاخره ، مساحت ناحیهء نرمال R به طور طبیعی و به صورت مجموع مساحت زیرنواحی به طور افقی یا قائمی تعریف می شود که R با رسم خطوط موازی محورهای مختصات به آنها تجزیه می گردد (ما عدم وابستگی مساحت R به طرز تجزیه آن را از دید هندسه واضح می گیریم) .

نه فقط هر ناحیهء نرمال مساحت تعریف شده دارد ، بلکه اگر چنین ناحیهء R با خطوطی افقی و قائم موازی محورهای مختصات تجزیه شود ، هر بخش از R که در سلولی از افراز (مستطیل) قرار دارد دارای مساحت است . این امر در شکل ۶ نموده شده است ، که در آن ناحیهء نرمال R در یک زمینه مرکب از بیست سلول مستطیلی (ناشی از تقاطع پنج

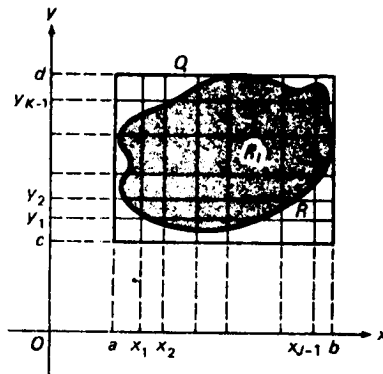


شکل ۶

خط افقی و شش خط قائم) رسم ، و به نوزده زیر ناحیهء ناتجبی افراز شده است (توجه کنید که سلول ۲۰ نقطه ای از R را ندارد) . زیر ناحیه های ۱ تا ۸ و ۱۱ تا ۱۹ همه ساده اند ؛ و در واقع ، زیر ناحیه های ۷ ، ۱۲ ، و ۱۳ مستطیلی می باشند . زیر ناحیه ۹ به طور افقی ساده است ، ولی زیر ناحیه ۱۰ از دو قطعهء ناهمبند تشکیل شده است . یکی ساده و دیگری نرمال ، و البته مساحتش مجموع مساحت دو قطعه گرفته می شود . شکل آنقدر کلی هست که همهء حالات

(زیر ناحیه‌های ساده، زیر ناحیه‌های نرمال، و "زیر ناحیه‌های مرکب از چند قطعه) را نشان می‌دهد، و در هر حالت، دست کم در اصول، انتساب مساحت به زیر ناحیه‌ها آسان است.

تعریف انتگرال مضاعف. حال آماده‌ایم انتگرال مضاعف تابع دومتغیره $f(x, y)$ روی ناحیه^۶ نرمال R را تعریف کنیم. فرض کنیم $Q = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ ناحیه^۷ مستطیلی بسته‌ای باشد که اضلاعش موازی محورهای مختصات بوده و شامل R باشد (ر. ک. شکل ۷)، و نقاط $x_j (j = 0, 1, \dots, J)$ و $y_k (k = 0, 1, \dots, K)$ افزایشی از بازه‌های $[a, b]$ و $[c, d]$



شکل ۷

به ترتیب با اندازه^۶ μ_x و μ_y باشند که در صفحه^۶ ۳۶۸ تعریف شده‌اند. این یعنی

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{j-1} < x_j = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{k-1} < y_k = d,$$

و

$$\mu_x = \max \{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_j - x_{j-1}\},$$

$$\mu_y = \max \{y_1 - y_0, y_2 - y_1, \dots, y_k - y_{k-1}\}.$$

در این صورت، دو مجموعه از خطوط

$$(۳) \quad \begin{aligned} x = a, \quad x = x_1, \quad x = x_2, \dots, \quad x = x_{j-1}, \quad x = b, \\ y = c, \quad y = y_1, \quad y = y_2, \dots, \quad y = y_{k-1}, \quad y = d, \end{aligned}$$

موازی محورهای مختصات افزایشی از مستطیل Q تشکیل می‌دهند؛ این خطوط Q را به JK زیر مستطیل و ناحیه^۶ R را به n زیر ناحیه^۶ بسته^۶ ناتهی R_1, R_2, \dots, R_n تقسیم می‌کنند که معمولاً " $n < JK$ " (ر. ک. شکل. به‌طور کلی، بعضی از زیر ناحیه‌ها غیرمستطیلی‌اند

که مرزهایشان از قسمتهایی از خطوط (۳) و قسمتهایی از مرز R تشکیل شده‌اند، ولی همانطور که قبلاً توضیح دادیم، چون R یک ناحیهٔ نرمال است، هر زیرناحیهٔ R_i دارای مساحت تعریف شدهٔ ΔA_i می‌باشد. به ازای تابع دو متغیرهٔ $f(x, y)$ ، فرض کنیم (p_i, q_i) نقطهٔ دلخواهی در R_i باشد، و مجموع ریمان

$$S = \sum_{i=1}^n f(p_i, q_i) \Delta A_i$$

را تشکیل می‌دهیم. فرض کنیم وقتی کمیت

$$\mu = \max \{ \mu_x, \mu_y \},$$

به نام اندازهٔ مش‌افراز، به صفر نزدیک شود، کمیت S بی‌توجه به انتخاب اعداد x_i, y_i, p_i و q_i صادق در شرایط داده‌شده، به‌حدی متناهی نزدیک گردد. در این صورت، این حد انتگرال (مضاعف) f روی R نام داشته و با

$$\iint_R f(x, y) dA$$

نموده می‌شود، و گوییم f بر R انتگرالپذیر است. لذا،

$$(۴) \quad \iint_R f(x, y) dA = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(p_i, q_i) \Delta A_i,$$

که در آن f انتگرالده و R ناحیهٔ انتگرالگیری انتگرال سمت چپ خوانده می‌شود.

مثال ۲. هرگاه A مساحت R باشد، آنگاه به ازای هر افراز ناحیهٔ R به وسیلهٔ خطوط موازی محورهای مختصات،

$$A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i$$

لذا، با اختیار $1 \equiv f(x, y)$ در فرمول (۴)، خواهیم داشت

$$\iint_R 1 dA = \iint_R dA = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta A_i = \lim_{\mu \rightarrow 0} A = A.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$(۵) \quad A = \iint_R dA.$$

انتگرالگیری چندگانه ۱۳۲۳

با آنکه فرض کرده‌ایم مرز ناحیه انتگرالگیری R از نمودارهای توابع پیوسته‌ای از x یا y تشکیل شده است، ما راجع به پیوستگی انتگرالده $f(x, y)$ انتگرال مضاعف فرضی نکرده‌ایم، و ممکن است توابع ناپیوسته نیز انتگرالپذیر باشند. ولی، همانطور که انتظار می‌رود، قضیه ۱، صفحه ۳۷۱، راجع به انتگرالپذیری توابع پیوسته به انتگرالهای مضاعف سرایت می‌کند.

قضیه ۱ (پیوستگی انتگرالپذیری بر یک ناحیه را ایجاب می‌کند) . هرگاه تابع $f(x, y)$ بر ناحیه نرمال R پیوسته باشد، آنگاه $f(x, y)$ بر R انتگرالپذیر می‌باشد.

ما برهان را، که به حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته تعلق دارد، حذف می‌کنیم. تعریف انتگرال مضاعف $\iint_R f(x, y) dA$ ، جدا از نکات فنی مربوط به ماهیت ناحیه انتگرالگیری R و طرز افراز آن، اساساً همان تعریف انتگرال معمولی یا " ساده " $\int_a^b f(x) dx$ است. لذا، انتگرالهای مضاعف و انتگرالهای ساده از قواعد مشابهی تبعیت می‌کنند. حال مهمترین قواعد از این نوع را ذکر کرده، برهان آنها را حذف می‌کنیم زیرا شبیه برهانهای نظیر برای انتگرالهای ساده می‌باشند. در هر حالت، R یک ناحیه نرمال می‌باشد. (یک) هرگاه f بر R انتگرالپذیر بوده و c یک ثابت باشد، آنگاه cf نیز بر R انتگرالپذیر است و

$$\iint_R cf(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA.$$

(دو) هرگاه f و g هر دو بر R انتگرالپذیر باشند، آنگاه مجموع $f + g$ نیز بر R انتگرالپذیر بوده و

$$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA.$$

(سه) هرگاه f بر R انتگرالپذیر بوده و $c \leq f(x, y) \leq C$ ، که در آن c و C ثابت‌اند، آنگاه

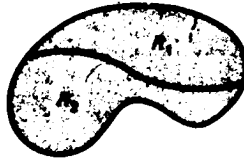
$$cA \leq \iint_R f(x, y) dA \leq CA,$$

که در آن A مساحت R است. بخصوص، هرگاه $f(x, y) \geq 0$ ، آنگاه

$$\iint_R f(x, y) dA \geq 0.$$

(چهار) هرگاه f بر R پیوسته بوده و R به دو زیر ناحیه^۶ نرمال R_1 و R_2 بدون نقاط درونی مشترک (مثل شکل ۸) تجزیه شده باشد، آنگاه

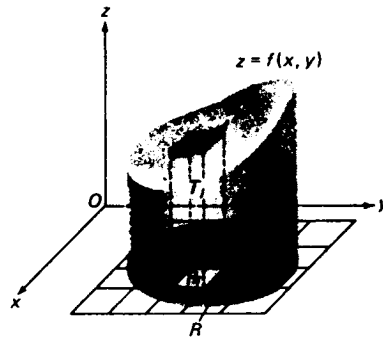
$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA.$$



شکل ۸

این مشابه قضیه^۶ ۲، صفحه^۶ ۳۸۲، است و ما فرض پیوستگی f را طریقه^۶ آسان تضمین وجود هر سه انتگرال می‌دانیم.

حجم زیر یک سطح به‌عنوان انتگرال مضاعف. حال، به کمک انتگرال مضاعف، عبارتی برای حجم زیر سطح S به دست می‌آوریم، که در آن S نمودار یک تابع نامنفی پیوسته مانند $f(x, y)$ است که بر ناحیه^۶ نرمال R تعریف شده است. این حجم ناحیه^۶ توپر T مانند شکل ۹ است، که در آن R قاعده^۶ آن و سطح S بالای آن بوده سطح جانبی‌اش از پاره‌خطهایی



شکل ۹

موازی محور z تشکیل شده است؛ T را می‌توان یک "شبه استوانه" تصور کرد، زیرا S در حالت کلی موازی R نیست. همان‌طور که خطوط $R(3)$ را به n زیرناحیه^۶ دوبعدی R_1, R_2, \dots, R_n

تقسیم می‌کنند، صفحات باهمان معادله (در فضای سه بعدی) T را به n زیرناحیه سه بعدی T_1, T_2, \dots, T_n تقسیم می‌کنند. که هر یک ستون باریکی با بالای خمیده می‌باشد. تابع f پیوسته است؛ و در نتیجه، مقدارش بر زیر ناحیه R_i ، دست کم وقتی R_i به قدر کافی کوچک باشد، فقط کمی تغییر می‌کند. لذا، اگر f را بر R_i با مقدار ثابت $f(p_i, q_i)$ بگیریم که (p_i, q_i) نقطه دلخواهی در R_i است، تقریب مناسبی به دست می‌آوریم. این معادل است با اینکه ستون T_i با بالای خمیده را با یک استوانه معمولی به ارتفاع $f(p_i, q_i)$ و بالای تخت موازی قاعده‌اش R_i عوض کنیم؛ این در شکل برای یک ستون " درونی " با قاعده مستطیلی نموده شده است، که در آن استوانه یک متوازی السطوح قائم است. بنابر مثال ۱، صفحه ۶۹۹، این استوانه، چه قاعده‌اش مستطیلی باشد یا نه، به حجم $f(p_i, q_i) \Delta A_i$ است. بنابر این، اگر تمام ستونها را با استوانه‌های تقریب ساز عوض کنیم، جسم جدیدی به دست می‌آید که از n استوانه تشکیل شده و حجمش مساوی است با

$$\sum_{i=1}^n f(p_i, q_i) \Delta A_i,$$

یعنی، مجموع احجام n استوانه. معقول است که این مجموع را تقریب مناسبی برای حجم V جسم T بگیریم، که این تقریب وقتی اندازه هر زیر ناحیه R_i کوچک شود، یعنی وقتی اندازه μ مش μ افزاز R به صفر نزدیک شود، بهتر می‌شود (توجه کنید که $\mu < \epsilon$ ایجاب می‌کند که هر $\Delta A_i < \epsilon^2$). حال، با این انگیزه، V را مساوی حد زیر تعریف می‌کنیم:

$$V = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(p_i, q_i) \Delta A_i,$$

یعنی،

$$V = \iint_R f(x, y) dA,$$

که در آن وجود انتگرال مضاعف از قضیه ۱ و فرض پیوستگی f نتیجه می‌شود. به طور کلی، فرض کنیم S_1 و S_2 دو سطح باشند که تصاویرشان روی صفحه xy ناحیه نرمال R بوده، و S_1 و S_2 نمودار دو تابع پیوسته $f_1(x, y)$ و $f_2(x, y)$ صادق در نامساوی $f_2(x, y) \geq f_1(x, y)$ باشند. در این صورت، بنابر همان نوع استدلال به کار رفته در بخش ۳.۴ برای به دست آوردن فرمولی جهت مساحت بین دو منحنی، حجم بین S_1 و S_2 مساوی است با

$$V = \iint_R [f_2(x, y) - f_1(x, y)] dA,$$

محاسبهٔ مستقیم انتگرال مضاعف $\iint_R f(x, y) dA$ با شروع از تعریفش به عنوان مقدار حدى یک مجموع ریمان ناممکن است مگر در ساده‌ترین حالات (ر. ک. مسئله ۲۳). لذا، باید روش دیگری برای محاسبهٔ انتگرالهای مضاعف به دست آوریم. برای این کار، چند انتگرال مختلف معرفی می‌کنیم که مستلزم محاسبهٔ دو انتگرال ساده اند.

انتگرالهای مکرر. فرض کنیم R یک ناحیهٔ به‌طور قائم ساده باشد که با نامساویهای $a \leq x \leq b$ ، $\theta_1(x) \leq y \leq \theta_2(x)$ تعریف شده است، که در آنها θ_1 و θ_2 توابع پیوسته‌ای بر بازهٔ $[a, b]$ می‌باشند، و $f(x, y)$ را یک تابع دو متغیره می‌گیریم که بر R تعریف شده است. در این صورت، انتگرال

$$(۶) \quad I_R = \int_a^b \left[\int_{\theta_1(x)}^{\theta_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

را انتگرال مکرر f روی R می‌نامیم. برای به دست آوردن I_R ، ابتدا با ثابت گرفتن x در انتگرالدهٔ $f(x, y)$ و حدود انتگرالگیری $\theta_1(x)$ و $\theta_2(x)$ ، از $f(x, y)$ نسبت به y انتگرال می‌گیریم^۱. حاصل این انتگرالگیری به x بستگی دارد؛ و در نتیجه، تابعی از x ، مثلاً " $i(x)$ "، به دست می‌آید. سپس از $i(x)$ نسبت به x بین حدود ثابت a و b انتگرال گرفته، عددی به دست می‌آوریم که در فرمول (۶) با I_R نموده شده است. به همین نحو، اگر R یک ناحیهٔ به‌طور افقی ساده باشد که با نامساویهای $c \leq y \leq d$ ، $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$ تعریف شده است، که در آنها h_1 و h_2 توابع پیوسته‌ای بر بازهٔ $[c, d]$ اند، انتگرال

$$(۶') \quad J_R = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

انتگرال مکرر f روی R نام دارد. اما، برای به دست آوردن J_R ، ابتدا از $f(x, y)$ ، با ثابت گرفتن y در انتگرالدهٔ $f(x, y)$ و حدود انتگرالگیری $h_1(y)$ و $h_2(y)$ ، نسبت به x انتگرال گرفته تابعی از y ، مثلاً " $z(y)$ "، به دست می‌آوریم و سپس از آن نسبت به y بین حدود ثابت c و d انتگرال می‌گیریم. توجه کنید که در هر مرحله از محاسبهٔ I_R و J_R ، انتگرال تابع یک متغیره‌ای را محاسبه می‌کنیم؛ و لذا، مجازیم از ابزار اصلی محاسبهٔ انتگرالها، یعنی قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، استفاده کنیم.

۱. این فرایند نوعی "انتگرالگیری جزئی" شبیه مشتقگیری جزئی است (برای محاسبهٔ $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ را ثابت گرفته و نسبت به y مشتق می‌گیریم).

تبصره. در بحث فوق تلویحا "فرض کرده ایم انتگرالهای (۶) و (۶') وجود دارند. می توان نشان داد که پیوستگی توابع f ، θ_1 ، و θ_2 پیوستگی انتگرال داخلی $i(x)$ در (۶) و در نتیجه وجود (۶)، را تضمین می کند، ولی پیوستگی توابع f ، h_1 ، و h_2 پیوستگی انتگرال داخلی $j(y)$ در (۶')، و در نتیجه وجود (۶')، را تضمین خواهد کرد. یادآور می شویم که پیوستگی θ_1 ، θ_2 ، h_1 ، و h_2 از اول، در تعریف نواحی به طور قائم و به طور ساده، فرض شده است.

برای آنکه نمادها ساده باشند، معمولا "کروشه های داخلی فرمولهای (۶) و (۷) را حذف می کنند. لذا، از این به بعد انتگرالهای مکرر J_R و I_R را به صورت

$$I_R = \int_a^b \int_{\theta_1(x)}^{\theta_2(x)} f(x, y) dy dx, \quad J_R = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy,$$

یا

$$I_R = \int_a^b dx \int_{\theta_1(x)}^{\theta_2(x)} f(x, y) dy, \quad J_R = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx$$

می نویسیم، که در آنها حذف کروشه ها به قیمت جداسازی دیفرانسیلهای dx و dy تمام شده است، به این صورت که dx فقط پشت علامت انتگرالی که حدود انتگرالگیریش تابع x اند ظاهر شده، و dy فقط پشت علامت انتگرالی آمده که حدود انتگرالگیریش تابع y می باشند.

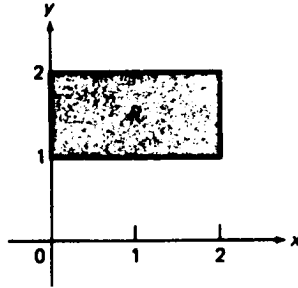
مثال ۳. دو انتگرال مکرر J_R و I_R تابع $f(x, y) = 3xy^2 - 2x^2y$ را روی مستطیل R محدود به خطوط $x = 0$ ، $x = 2$ ، $y = 1$ ، و $y = 2$ حساب کنید.

حل. I_R و J_R هر دو وجود دارند، زیرا f پیوسته بوده و R بوضوح ساده است (ر. ک. شکل ۱۰). با محاسبه I_R ، به دست می آوریم

$$\begin{aligned} I_R &= \int_0^2 dx \int_1^2 (3xy^2 - 2x^2y) dy = \int_0^2 \left[xy^3 - x^2y^2 \right]_{y=1}^2 dx \\ &= \int_0^2 (7x - 3x^2) dx = \left[\frac{7}{2}x^2 - x^3 \right]_0^2 = 14 - 8 = 6, \end{aligned}$$

که در آن قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال دوبار به کار رفته است. به همین نحو، از محاسبه J_R نتیجه می شود که

$$\begin{aligned}
 J_R &= \int_1^2 dy \int_0^2 (3xy^2 - 2x^2y) dx = \int_1^2 \left[\frac{3}{2} x^2 y^2 - \frac{2}{3} x^3 y \right]_{x=0}^2 dy \\
 &= \int_1^2 \left(6y^2 - \frac{16}{3} y \right) dy = \left[2y^3 - \frac{8}{3} y^2 \right]_1^2 = \frac{16}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) = 6.
 \end{aligned}$$



شکل ۱۰

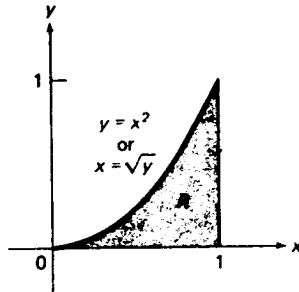
البته، تساوی $I_R = J_R$ تصادفی نیست، وبعدها "خواهیم دید که هر دو با $\iint_R (3xy^2 - 2x^2y) dA$ یعنی انتگرال مضاعف f روی R ، مساویند.

مثال ۴. انتگرال مکرر

$$I_R = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x + y) dy$$

را حساب کرده، و سپس ترتیب انتگرالگیری را عکس نمایید.

حل. چون با انتگرالی از نوع I_R شروع کرده ایم، فوراً "معلوم می شود که ناحیه انتگرالگیری R به طور قائم ساده است. در واقع، ناحیه تعریف شده با نامساویهای $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2$ است؛ یعنی، ناحیه 11 که به محور x ، خط $x = 1$ ، و سهمی $y = x^2$ محدود شده است.



شکل ۱۱

از محاسبه I_R معلوم می شود که

$$\begin{aligned} I_R &= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x+y) dy = \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left(x^3 + \frac{1}{2} x^4 \right) dx = \left[\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{10} x^5 \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{7}{20}. \end{aligned}$$

برای عکس کردن ترتیب انتگرالی گیری، باید انتگرال مکرر دیگر J_R را تشکیل دهیم. در این کار R باید به طور افقی نیز ساده باشد. اما اگر خطی افقی از چپ به راست R را قطع کند، در نقطه‌ای از سهمی $y = x^2$ وارد R شده و R را در نقطه‌ای از خط $x = 1$ ترک می کند. لذا، چون $y = x^2$ معادل $x = \sqrt{y}$ به ازای $y \geq 0$ است، ناحیه R را می توان با نامساویهای $0 \leq y \leq 1, \sqrt{y} \leq x \leq 1$ نیز تعریف کرد؛ و در نتیجه، علاوه بر به طور قائم ساده بودن به طور افقی ساده می باشد. لذا، می توان ترتیب انتگرالی گیری را عکس کرده، انتگرال مکرر دیگر را نوشت:

$$J_R = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 (x+y) dx.$$

از محاسبه J_R نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} J_R &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 + xy \right]_{x=\sqrt{y}}^1 dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y - \frac{1}{2} y - y^{3/2} \right) dy \\ &= \left[\frac{1}{2} y + \frac{1}{4} y^2 - \frac{2}{5} y^{5/2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = \frac{7}{20}, \end{aligned}$$

در نتیجه، مجدداً داریم $I_R = J_R$.

محاسبه انتگرالهای مضاعف. حال طرز محاسبه انتگرالهای مضاعف را بر حسب انتگرالهای مکرر نشان داده و در عین حال علت تساوی $I_R = J_R$ در دو مثال اخیر را توضیح می دهیم.

قضیه ۲ (محاسبه انتگرال مضاعف روی یک ناحیه به طور قائم ساده). هرگاه $f(x, y)$ بر ناحیه به طور قائم ساده R تعریف شده با نامساویهای $a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ تعریف شده باشد، آنگاه

$$(۷) \quad \iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

برهان . همانطور که در بالا نشان داده‌ایم ، انتگرال مضاعف

$$(۸) \quad V = \iint_R f(x, y) dA$$

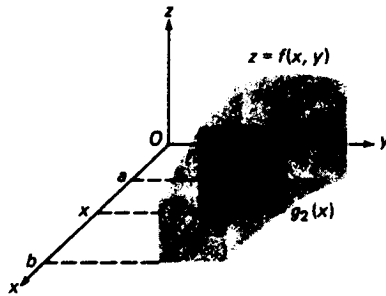
حجم V جسم شبه استوانه‌ای T است که بین سطح $z = f(x, y)$ و ناحیه R قرار دارد (ر. ک . شکل ۱۲ ، که در آن f به خاطر سادگی نامنفی گرفته شده است) . انتگرال مکرر

$$(۹) \quad I_R = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

را در نظر می‌گیریم . از شکل واضح است که اگر ثابت x ، انتگرال داخلی

$$i(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$$

همان مساحت زیر منحنی $z = f(x, y)$ از $g_1(x)$ تا $g_2(x)$ در صفحه $x = \text{ثابت}$ است . اما این خود مساحت مقطع عرضی جدا شده از T توسط صفحه $x = \text{ثابت}$ عمود بر محور x است . به



شکل ۱۲

عبارت دیگر ، $i(x)$ تابع مساحت مقطع عرضی پیوسته است که در بخش ۱۰.۸ با $A(x)$ نموده شد . لذا ، طبق فرمول (۱) ، صفحه ۶۹۷ ، حجم جسم T نیز مساوی است با

$$(۱۰) \quad V = \int_a^b i(x) dx = I_R,$$

و از مقایسه فرمولهای (۸) و (۱۰) معلوم می‌شود که

$$\iint_R f(x, y) dA = I_R,$$

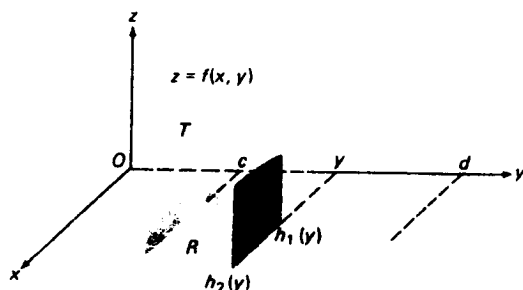
که با (۷) معادل می‌باشد.

همانطور که انتظار می‌رود، قضیه^۲ مشابهی برای انتگرالهای مضاعف روی یک ناحیه^۲ به‌طور افقی ساده وجود دارد.

قضیه^۲ (محاسبه^۲ انتگرال مضاعف روی یک ناحیه^۲ به‌طور افقی ساده). هرگاه $f(x, y)$ بر ناحیه^۲ به‌طور افقی ساده^۲ R با نامساویهای $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, $c \leq y \leq d$ تعریف شده باشد، آنگاه

$$(۷') \quad \iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

برهان. برهان اساساً همان برهان قضیه^۲ است. فرض کنیم T جسم شبه استوانه^۲ بین سطح $z = f(x, y)$ و ناحیه^۲ R باشد (ر.ک. شکل ۱۳). مجدداً، "حجم T از انتگرال مضاعف



شکل ۱۳

(۸) به دست می‌آید. انتگرال مکرر

$$(۹) \quad J_R = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

را در نظر می‌گیریم. از شکل واضح است که اگر ثابت y ، انتگرال داخلی

$$j(y) = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx$$

همان مساحت زیر منحنی $z = f(x, y)$ از $h_1(y)$ تا $h_2(y)$ در صفحه^۲ ثابت y است. اما این خود مساحت مقطع عرضی جدا شده از T به وسیله^۲ صفحه^۲ ثابت $y = \text{عمود بر محور } y$ است.

لذا، طبق روش مقاطع عرضی، حجم جسم T نیز مساوی است با

$$(۱۵') \quad V = \int_c^d j(y) dy = J_R.$$

واز مقایسه فرمولهای (۸) و (۱۵') باهم معلوم می شود که

$$\iint_R f(x, y) dA = J_R,$$

که با (۷') معادل است.

از تلفیق قضایای ۲ و ۲' و این فرض که ناحیه R در سمت چپ دو فرمول (۷) و (۷') یکی اند، نتیجه اساسی دیگری فوراً " به دست می آید.

قضیه ۳ (محاسبه انتگرال مضاعف روی یک ناحیه ساده). فرض کنیم R ناحیه ساده ای باشد که با نامساویهای $a \leq x \leq b$ ، $\theta_1(x) \leq y \leq \theta_2(x)$ و با نامساویهای $c \leq y \leq d$ ، $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$ تعریف شده است، و $f(x, y)$ بر R پیوسته باشد. در این صورت،

$$(۱۱) \quad \iint_R f(x, y) dA = I_R = J_R,$$

که در آن I_R و J_R انتگرالهای مکرر (۹) و (۹') f روی R اند. بخصوص،

$$I_R = J_R,$$

در نتیجه، دو انتگرال مکرر f روی R مساویند.

تبصره. در اثبات قضایای ۲ و ۲' ساده لوحانه فرض کرده ایم چیزی به نام "حجم" یک جسم وجود دارد، که می توان آن را به طرق رضایت مندانه ای تعریف کرد که به عبارات مختلفی برای حجم منجر می شوند که می توان آنها را بدون تناقض باهم مساوی گرفت (همین فرض بارها در فصل ۸ شده است). بررسی عمیقتر معنی مساحت و حجم، که در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته شده است، نشان می دهد که این روش شهودی ما را گمراه نکرده است، و فرمولهای (۷)، (۷')، و (۱۱) کاملاً " مناسباند مشروط بر اینکه انتگرالده f و ناحیه انتگرالگیری R از شرایط بیان شده تبعیت می کنند.

حال مسئله محاسبه عملی انتگرالهای مضاعف کامل شده است. در انتگرال مضاعف

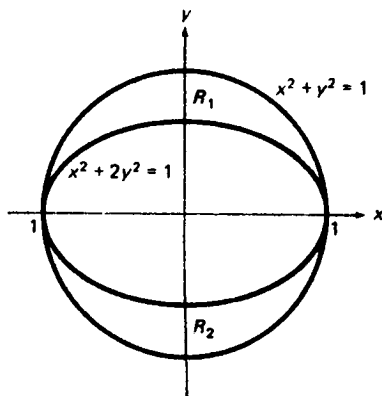
$\iint_R f(x, y) dA$ که R یک ناحیهٔ نرمال بوده و f بر R پیوسته است، R را (در صورت لزوم) با رسم خطوط مناسبی موازی محورهای مختصات به زیر ناحیه‌های به طور قائم یا افقی ساده طبق قاعدهٔ (چهار)، صفحهٔ ۱۳۲۴،

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \dots + \iint_{R_n} f(x, y) dA.$$

اما هر یک از انتگرالهای سمت راست را می‌توان با انتگرال مکرری از نوع I_R یا J_R عوض کرد، و محاسبهٔ یک انتگرال مکرر به دو انتگرالگیری متوالی از توابع یک متغیره تحویل می‌شود.

مثال ۵. انتگرال مضاعف $\iint_R x^2 dA$ را در صورتی حساب کنید که R ناحیهٔ بین دایرهٔ یکه $x^2 + y^2 = 1$ و بیضی $x^2 + 2y^2 = 1$ باشد.

حل. محور x ، R را به نواحی به طور قائم ساده R_1 و R_2 مثل شکل ۱۴ تقسیم می‌کند.



شکل ۱۴

لذا، طبق قاعدهٔ (چهار) و قضیهٔ ۲،

$$\begin{aligned} \iint_R x^2 dA &= \iint_{R_1} x^2 dA + \iint_{R_2} x^2 dA \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{(1-x^2)/2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2 dy + \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{-\sqrt{(1-x^2)/2}} x^2 dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_{-1}^1 x^2 \left(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{\frac{1-x^2}{2}} \right) dx \\
 &= 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx \\
 &= 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx,
 \end{aligned}$$

که در آخرین مرحله از زوج بودن انتگرالده استفاده کرده ایم. برای محاسبه آخرین انتگرال، جانشانی $x = \sin t$ را انجام می دهیم؛ در نتیجه، $dx = \cos t dt$ و

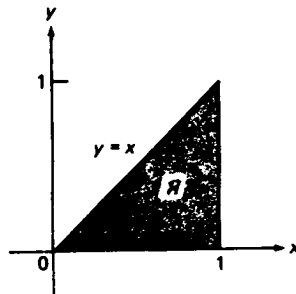
$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt = \frac{1}{8} \left[t - \frac{1}{4} \sin 4t \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{16}.
 \end{aligned}$$

پس نتیجه می شود که

$$\iint_R x^2 dA = 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{\pi}{16} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{\pi}{4} \approx 0.23.$$

این، از نظر هندسی، حجم زیر استوانه سه‌موی $z = x^2$ و روی ناحیه R می‌باشد.

مثال ۶. انتگرال مضاعف $\iint_R e^{-x^2} dA$ روی ناحیه R محدود به محور x ، خط $x = 1$ ، و خط $y = x$ را حساب کنید (ر. ک. شکل ۱۵).



شکل ۱۵

حل. ناحیه R مثلثی ساده است. لذا، طبق قضیه ۳،

$$\iint_R e^{-x^2} dA = \int_0^1 dx \int_0^x e^{-x^2} dy = \int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2} dx$$

(حدود انتگرالگیری را توضیح دهید) . اگر به محاسبه انتگرال مکرر دوم بپردازیم ، از ابتدا به مانع برمی خوریم ، زیرا تابع e^{-x^2} پادمشتق مقدماتی ندارد (ر.ک. صفحه ۵۹۱) . اما انتگرال مکرر اول را می توان به آسانی حساب کرد :

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_0^x e^{-x^2} dy &= \int_0^1 e^{-x^2} x dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 d(e^{-x^2}) \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right) = \frac{e-1}{2e}. \end{aligned}$$

لذا

$$\iint_R e^{-x^2} dA = \frac{e-1}{2e}.$$

محاسبه مساحت و حجم ، چون از قبل طرز محاسبه مساحت یک ناحیه به طور قائم یا به طور افقی ساده را به صورت مساحت بین دو منحنی می دانیم ، و نیز طرز محاسبه احجام به روش مقاطع عرضی بر ما معلوم است ، استفاده از انتگرالهای مضاعف برای محاسبه مساحت و احجام بیشتر به جهت راحتی است تا لزوم . ولی جنبه راحتی آن عظیم است . نکته آن است که وقتی مساحت یا حجم به صورت انتگرال مضاعف بیان شد ، بقیه محاسبات معمولاً ساده است . اگر ناحیه انتگرالگیری به طور صریح داده شده باشد ، باید با کمی رسم آن را پیدا کنیم ، ولی یک تصویر خام که نکات اصلی مسئله را آشکار کند خواهد بود .

مثال ۷ . مساحت A ی ناحیه R در مثال ۵ را بیابید .

حل . بنابر فرمول (۵) ، A چیزی جز انتگرال مضاعف $\iint_R dA$ نیست . لذا ، از تعویض انتگرالده x^2 با ۱ در محاسبات مثال ۵ ، به دست می آوریم

$$A = \iint_R dA = 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

انتگرالده سمت راست یکچهارم مساحت محصور به دایره یکه ، یعنی π ، است . پس نتیجه

می شود که

$$A = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\pi.$$

به عنوان تمرین، این جواب را با تفریق مساحت محصور به بیضی $x^2 + 2y^2 = 1$ (ر. ک. مثال ۴، صفحه ۹۴۸) از مساحت محصور به دایره^۴ بیکه امتحان کنید.

مثال ۸. حجم V زیر صفحه^۵ $x + y - z = 0$ و روی R محدود به محور x ، خط $x = 1$ ، و سهمی $y = x^2$ را بیابید.

حل. صفحه نمودار تابع $z = x + y$ است؛ در نتیجه،

$$V = \iint_R (x + y) dA.$$

بنابر قضیه^۲، این انتگرال مضاعف مساوی انتگرال مکرر

$$I_R = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x + y) dy$$

است. اما، همانطور که قبلاً در مثال ۴ نشان داده شد، $I_R = \frac{7}{20}$ ؛ و لذا، $V = \frac{7}{20}$.

بالاخره، ملاحظه می‌کنیم که گاهی نوشتن انتگرال مضاعف $\iint_R f(x, y) dA$ به صورت

$$\iint_R f(x, y) dx dy$$

شایسته است. این شکل دیگر از انتگرال مضاعف با انتگرال مکرر خلط نمی‌شود، زیرا شامل علامت \iint_R است که در آن دو علامت انتگرال حدود انتگرالگیری جداگانه‌ای حمل نمی‌کنند.

مسائل

انتگرال مکرر داده شده را حساب کنید.

$$\int_1^3 dy \int_2^3 \frac{dx}{(x+y)^2} \quad \cdot \checkmark$$

$$\int_0^2 dx \int_0^1 (2x + y^2) dy \quad \cdot \checkmark$$

$$\int_1^2 dx \int_{1/x}^x \frac{y^2}{x^2} dy \quad \cdot \checkmark$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y^2}{x^2 + 1} dx \quad \cdot \checkmark$$

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dx \quad . ۶ \checkmark$$

$$\int_2^8 dx \int_0^{\ln x} e^y dy \quad . ۵ \checkmark$$

$$\int_{-1}^1 dx \int_{3-x}^2 (x+2y) dy \quad . ۸ \checkmark$$

$$\int_3^5 dy \int_y^{2y} \frac{x}{y} dx \quad . ۷ \checkmark$$

$$\int_0^\pi dy \int_0^{1+\cos y} x^2 \sin y dx \quad . ۱ \checkmark$$

$$\int_0^1 dx \int_x^{x^2} (3x-y) dy \quad . ۹ \checkmark$$

$$\int_0^{\pi/2} dx \int_{\sin x}^1 y^3 dy \quad . ۱۲ \checkmark$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dx \quad . ۱۱ \checkmark$$

در انتگرال مکرر داده شده، پس از رسم ناحیه انتگرالگیری R ، ترتیب انتگرالگیری را عوض نمایید. (فرض کنید $f(x, y)$ پیوسته باشد.)

$$\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy \quad . ۱۴ \checkmark$$

$$\int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy \quad . ۱۳ \checkmark$$

$$\int_1^e dy \int_0^{\ln y} f(x, y) dx \quad . ۱۶ \checkmark$$

$$\int_0^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx \quad . ۱۵ \checkmark$$

۱۷. با تعویض ترتیب انتگرالگیری، مجموع

$$\int_0^3 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_3^6 dx \int_0^{6-x} f(x, y) dy$$

را به صورت انتگرال مکرر بنویسید.

۱۸. چرا انتگرال مکرر

$$\int_0^1 dy \int_y^1 \sin \pi x^2 dx$$

را نمی‌توان به همین صورت حساب کرد؟ آن را با تعویض ترتیب انتگرالگیری حساب کنید.

اگر R ناحیه محدود به شکل داده شده باشد، انتگرال مضاعف $\iint_R f(x, y) dA$ را برحسب انتگرالهای مکرر بیان نمایید.

$$. ۱۹ \checkmark \quad \text{مثلث به رئوس } (1, 0), (2, 2), (0, 2)$$

$$. ۲۰ \checkmark \quad \text{دوزنقه به رئوس } (1, 1), (5, 1), (4, 4), (2, 4)$$

$$. ۲۱ \checkmark \quad \text{متوازی الاضلاع به رئوس } (0, 0), (2, -2), (3, -1), (1, 1)$$

$$. ۲۲ \checkmark \quad \text{چندضلعی به رئوس } (0, 0), (2, 0), (1, 1), (2, 2), (0, 2)$$

۲۳. فرض کنید R ناحیه مستطیلی تعریف شده با نامساویهای $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$

باشد. انتگرال مضاعف $\iint_R xy \, dA$ را مستقیماً از تعریف (۴) حساب کنید. راهنمایی. R را با خطوط افقی و قائم افراز کرده، و مجموع ریمان مبتنی بر نقاط در مراکز زیر مستطیلهای حاصل را تشکیل دهید.

۲۴. کدامیک از انتگرالهای مضاعف

$$\iint_R (x^4 + 6x^2y^2 + y^4) \, dA, \quad \iint_R (4x^3y + 4xy^3) \, dA$$

بزرگتر است؟

انتگرال مضاعف داده شده را حساب کنید.

۲۵. \checkmark $\iint_R \frac{x}{x^2+1} \, dA$ ، که در آن R ناحیهء مستطیلی محدود به خطوط $x=0$ ، $x=1$ ، $y=0$ و $y=1$ است.

۲۶. \checkmark $\iint_R xy^2 e^{xy} \, dA$ ، که در آن R ناحیهء مستطیلی محدود به خطوط $x=0$ ، $x=1$ ، $y=0$ و $y=2$ است.

۲۷. \checkmark $\iint_R \sqrt{4x^2 - y^2} \, dA$ ، که در آن R ناحیهء مثلثی محدود به خطوط $x=1$ ، $y=0$ و $y=x$ است.

۲۸. \checkmark $\iint_R y \, dA$ ، که در آن R ناحیهء کوچکتر محدود به دایرهء $(x-1)^2 + y^2 = 1$ و خط واصل بین نقاط $(2, 0)$ و $(0, 2)$ است.

۲۹. \checkmark $\iint_R \cos(x-y) \, dA$ ، که در آن R ناحیهء مثلثی محدود به خطوط $x=0$ ، $y=\pi$ و $y=x$ است.

۳۰. \checkmark $\iint_R e^{y/x} \, dA$ ، که در آن R ناحیهء محدود به خطوط $x=1$ ، $y=0$ و سهمی $y=x^2$ است.

۳۱. \checkmark $\iint_R xy \, dA$ ، که در آن R ناحیهء محدود به محورهای مختصات و منحنی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ است.

۳۲ ✓ $\iint_R x \ln y \, dA$ ، که در آن R ناحیه محدود به خطوط $x=2$ ، $y=1$ ، و منحنی $xy=1$ است .

با استفاده از انتگرال مضاعف ، مساحت A ی ناحیه R محدود به منحنیهای داده شده را بیابید .

۳۳ ✓ $x=e$ و $y=x$ ، $xy=1$

۳۴ ✓ $y=-2$ و $y=x-1$ ، $y=\ln x$

۳۵ ✓ $y=2-x$ و $y=\frac{1}{2}x^2-1$

۳۶ ✓ $x=4-3y^2$ و $x=y^2$

۳۷ ✓ $2x^2+y^2=1$ و $x^2+2y^2=1$

۳۸ $y^2-2x^2=1$ و $x^2+y^2=4$ (R شامل مبدا است)

با استفاده از انتگرال مضاعف ، حجم V ناحیه توپر داده شده T را بیابید .

۳۹ ✓ T به صفحات مختصات ، صفحه $z=x+2y+1$ و صفحات $x=1$ و $y=2$ محدود است .

۴۰ ✓ T به صفحات مختصات و صفحه $x+y+z=3$ محدود است .

۴۱ ✓ T در یکپهشت اول قرار داشته ، و به صفحات مختصات و صفحات $x+2y=2$ و $x+4y+2z=8$ محدود است .

۴۲ ✓ T به پنج صفحه $x=0$ ، $z=0$ ، $x+3y=6$ ، $2x+3y=12$ ، و $x+y+z=6$ محدود است .

۴۳ ✓ T به سهمی گون بیضوی $z=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2$ ، صفحات مختصات ، و صفحات $x=-2$ و $y=3$ محدود است .

۴۴ ✓ T به مخروط $z^2=xy$ و صفحات $x=2$ و $y=2$ محدود است .

۴۵ ✓ T به مخروط $z^2=xy$ و صفحه $x+y=4$ محدود است .

۴۶ ✓ T به استوانه مستدیر $x^2+y^2=1$ ، صفحه $z=0$ ، و صفحه $2x+2y+3z=6$ محدود است .

۴۷ ✓ T در یکپهشت اول قرار داشته ، و به استوانه بیضوی $4x^2+z^2=1$ ، صفحه $x=0$ و صفحات $y=0$ و $z=0$ محدود است .

۴۸ ✓ T در یکپهشت اول قرار داشته ، و به سهمی گون هذلولوی $2z=xy$ ، استوانه مستدیر $x^2+y^2=2x$ و صفحه $z=0$ محدود است .

۴۹ فرض کنید R یک ناحیه ساده باشد . با استفاده از قضیه ۳ ، نشان دهید که هر دو

فرمول (۲) و (۲') مقدار یکسانی برای مساحت R به ما می دهند .
 ۵۰. گوئیم مجموعه D همبند (قوسوار) است اگر هر جفت نقطه P و Q در D را بتوان با منحنی پیوسته‌ای که کاملاً " در D است به هم وصل کرد . یعنی ، منحنیی به معادلات پارامتری $x = x(t), y = y(t) (0 \leq t \leq 1)$ که در آن‌ها $x(t)$ و $y(t)$ توابع پیوسته‌ای بوده ، به ازای $0 \leq t \leq 1, (x(t), y(t)) \in D$ ، و $P = (x(0), y(0)), Q = (x(1), y(1))$. نشان دهید هرگاه $f(x, y)$ بر ناحیه R نرمال همبند به مساحت A پیوسته باشد ، آنگاه نقطه‌ای مانند (a, b) در R وجود دارد به طوری که

$$\iint_R f(x, y) dA = Af(a, b).$$

این قضیه مقدار میانگین برای انتگرالهای مضاعف است .
 راهنمایی . قضیه مقدار میانی ، صفحه ۱۵۴ ، را بر تابع $F(t) = f(x(t), y(t))$ اعمال کنید .

۵۱. از قضیه ۳ نتیجه بگیرید که

$$\frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy \quad (a \leq x \leq b),$$

که در آن $f(x, y)$ و $\partial f(x, y) / \partial x$ بر ناحیه مستطیلی $\{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ پیوسته‌اند . این نتیجه در مسئله ۶۳ ، صفحه ۱۲۶۴ ، پیش‌بینی شده بود .

۲.۱۴ انتگرالهای سه‌گانه

نکات بخش پیش را می‌توان فوراً " به انتگرالهای سه‌گانه ، یعنی انتگرالها روی نواحی سه - بعدی یا توپر ، تعمیم داد . گام بلند قبلاً " با رفتن از انتگرالهای ساده معمولی به انتگرالهای مضاعف برداشته شده است ، و انتقال از بعد دو به سه چیز اساساً " جدیدی را شامل نیست .

فرض کنیم R_{xy} یک ناحیه نرمال در صفحه xy باشد . در این صورت ، مجموعه تمام نقاطی چون (x, y, z) با خاصیت

$$(۱) \quad (x, y) \in R_{xy}, \quad g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y),$$

که در آن توابع g_1 و g_2 بر R_{xy} پیوسته‌اند (و \in عضویت مجموعه را نشان می‌دهد) ، یک ناحیه z - ساده در فضا نام دارد . به همین نحو ، مجموعه تمام نقاط (x, y, z) با خاصیت

$$(۱') \quad (x, z) \in R_{xz}, \quad h_1(x, z) \leq y \leq h_2(x, z),$$

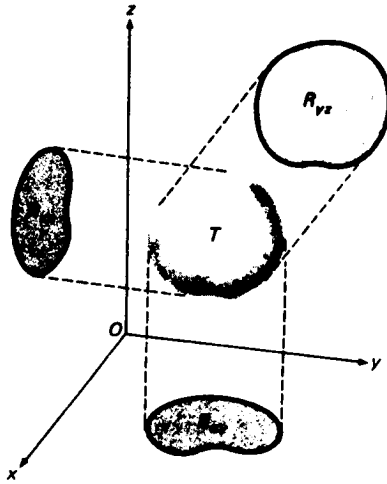
که در آن h_1 و h_2 بر ناحیه نرمال R_{xz} در صفحه xz پیوسته‌اند ، یک ناحیه y - ساده نامیده

می شود، ولی مجموعه تمام نقاط (x, y, z) با خاصیت

$$(1'') \quad (y, z) \in R_{yz}, \quad k_1(y, z) \leq x \leq k_2(y, z),$$

که در آن k_1 و k_2 بر ناحیه نرمال R_{yz} در صفحه yz پیوسته اند، یک ناحیه x -ساده نام دارد. فرض کنیم با رسم صفحات مناسبی موازی صفحات مختصات بتوان ناحیه توپر T را به تعدادی متناهی زیر ناحیه تجزیه کرد که هر یک نسبت به دست کم یکی از مختصات x ، y ، و z ساده باشد. در این صورت، گوئیم T نرمال است. طبیعی است که یک ناحیه x -ساده، y -ساده، یا z -ساده را نرمال می گیریم.

مثال ۱. ناحیه توپر T شکل ۱۶ x -ساده، y -ساده، و z -ساده است. شکل همچنین نواحی R_{xy} ، R_{xz} ، و R_{yz} نظیر به T را، که تصاویر T روی صفحات xy ، xz ، و yz اند، نشان می دهند.



شکل ۱۶

این نواحی توپر همه حجم تعریف شده دارند. حجم ناحیه z -ساده تعریف شده با (۱) چیزی جز حجم بین سطح بالایی $z = g_2(x, y)$ و سطح پایینی $z = g_1(x, y)$ که روی ناحیه R_{xy} در صفحه xy تصویر می شود نیست، و این حجم، طبق استدلال صفحات ۱۳۲۴ تا ۱۳۲۵، مساوی انتگرال مضاعف

$$V = \iint_{R_{xy}} [g_2(x, y) - g_1(x, y)] dx dy$$

می‌باشد. به همین نحو، حجم نواحی y -ساده و x -ساده^۶ تعریف شده با (۱') و (۱'') از انتگرالهای مضاعف

$$V = \iint_{R_{xz}} [h_2(x, z) - h_1(x, z)] dx dz$$

و

$$V = \iint_{R_{yz}} [k_2(y, z) - k_1(y, z)] dy dz$$

به دست می‌آیند. اگر ناحیه^۶ توپر T نرمال باشد، حجمش مجموع احجام زیرناحیه‌هایی تعریف می‌شود که هر یک نسبت به دست‌کم یکی از مختصات x ، y ، و z ساده است و T را می‌توان با رسم صفحاتی موازی صفحات مختصات به آنها تجزیه کرد. درست مثل نواحی مسطح نرمال، می‌توان نشان داد که اگر ناحیه^۶ توپر نرمال T با رسم صفحاتی موازی صفحات مختصات افراز شده باشد، بخشی از T که در هر سلول افراز (یک جعبه^۶ مکعب مستطیل) قرار دارد دارای حجم است.

تعریف انتگرال سه‌گانه. حال انتگرال سه‌گانه^۶ تابع سه‌متغیره^۶ $f(x, y, z)$ را روی ناحیه^۶ سه بعدی نرمال T تعریف می‌کنیم. فرض کنیم^۱

$$Q = \{(x, y, z): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, A \leq z \leq B\}$$

جعبه^۶ بسته‌ای (مکعب مستطیل) با وجوهی موازی صفحات مختصات باشد که شامل T است (ر.ک. شکل ۱۷)، و نقاط x_j ($j = 0, 1, \dots, J$)، y_k ($k = 0, 1, \dots, K$)، و z_l ($l = 0, 1, \dots, L$) افرازهایی از بازه‌های $[a, b]$ ، $[c, d]$ ، و $[A, B]$ با اندازه‌های مش μ_x ، μ_y ، و μ_z باشند. این بدان معنی است که

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{J-1} < x_J = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{K-1} < y_K = d,$$

$$A = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_{L-1} < z_L = B,$$

و

۱. بهتر بود به جای $e \leq z \leq f$ می‌نوشتیم $A \leq x \leq B$ ، ولی e پایه^۶ لگاریتمهای طبیعی را القا کرده و f از قبل برای انتگرالده $f(x, y, z)$ رزرو شده است.

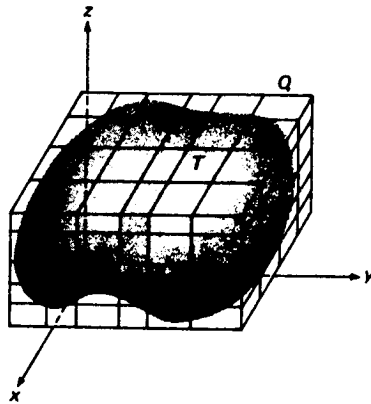
$$\mu_x = \max \{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_J - x_{J-1}\},$$

$$\mu_y = \max \{y_1 - y_0, y_2 - y_1, \dots, y_K - y_{K-1}\},$$

$$\mu_z = \max \{z_1 - z_0, z_2 - z_1, \dots, z_L - z_{L-1}\}.$$

در این صورت ، سه مجموعه از صفحات

$$(2) \quad \begin{aligned} x = a, \quad x = x_1, \quad x = x_2, \dots, \quad x = x_{J-1}, \quad x = b, \\ y = c, \quad y = y_1, \quad y = y_2, \dots, \quad y = y_{K-1}, \quad y = d, \\ z = A, \quad z = z_1, \quad z = z_2, \dots, \quad z = z_{L-1}, \quad z = B, \end{aligned}$$



شکل ۱۷

موازی صفحات مختصات افرازی از جعبه Q تشکیل می دهند؛ این صفحات Q را به JKL زیر جعبه و ناحیه T را به n زیرناحیه T_1, T_2, \dots, T_n که $n \leq JKL$ مثل شکل تقسیم می کنند (معمولا " $n < JKL$ "). در حالت کلی، بعضی از زیرناحیه ها غیرمستطیلی بوده و مرزهایشان از قسمتهایی از صفحات (۲) و قسمتهایی از مرز T تشکیل شده اند، ولی چون T یک ناحیه نرمال است، هر زیرناحیه T_i حجم تعریف شده ΔV_i دارد. به ازای هر تابع سه متغیره $f(x, y, z)$ ، فرض کنیم (p_i, q_i, r_i) نقطه دلخواهی در T_i باشد، و مجموع ریمان

$$S = \sum_{i=1}^n f(p_i, q_i, r_i) \Delta V_i$$

را تشکیل می دهیم. فرض کنیم وقتی کمیت

$$\mu = \max \{\mu_x, \mu_y, \mu_z\},$$

معروف به اندازه مش افزایش به صفر نزدیک شود، S صرف نظر از انتخاب اعداد x_j, y_k, z_l و r_i, q_i, p_i, z_i صادق در شرایط مقرر به حدی متناهی نزدیک گردد. در این صورت،

این حد انتگرال (سه‌گانه) f روی R نامیده و با

$$\iiint_T f(x, y, z) dV$$

نموده می‌شود، و گوییم تابع f بر T ، یا روی T ، انتگرال‌پذیر است. لذا،

$$(۳) \quad \iiint_T f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(p_i, q_i, r_i) \Delta V_i,$$

که در آن f انتگرال‌ده و T ناحیه انتگرالگیری انتگرال سمت چپ نام دارد.

مثال ۲. هرگاه V حجم T باشد، آنگاه، به ازای هر افراز ناحیه با صفحات موازی صفحات مختصات،

$$V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i$$

لذا، با اختیار $f(x, y, z) \equiv 1$ در فرمول (۳)، به دست می‌آوریم

$$\iiint_T 1 dV = \iiint_T dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \lim_{n \rightarrow \infty} V = V.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$(۴) \quad V = \iiint_T dV.$$

همانطور که احتمالاً "حدس زده‌اید، قضیه ۱، صفحه ۱۳۲۳، به انتگرالهای سه‌گانه

سرایت دارد.

قضیه ۴ (پیوستگی انتگرال‌پذیری بر یک ناحیه توپو را ایجاب می‌کند). هرگاه تابع $f(x, y, z)$ بر ناحیه توپو نرمال T پیوسته باشد، آنگاه $f(x, y, z)$ بر T انتگرال‌پذیر است.

انتگرالهای سه‌گانه از همان قواعد (یک) تا (چهار)، صفحات ۱۳۲۳ تا ۱۳۲۴ در مورد

انتگرالهای مضاعف، با تغییرات مختصر مناسبی، پیروی می‌کنند.

(یک) هرگاه f بر T انتگرال‌پذیر بوده و c ثابت باشد، آنگاه cf نیز بر T انتگرال‌پذیر است، و

$$\iiint_T cf(x, y, z) dV = c \iiint_T f(x, y, z) dV.$$

(دو) هرگاه f و g هر دو بر T انتگرالپذیر باشند، آنگاه مجموع $f + g$ نیز بر T انتگرالپذیر بوده، و

$$\iiint_T [f(x, y, z) + g(x, y, z)] dV = \iiint_T f(x, y, z) dV + \iiint_T g(x, y, z) dV.$$

(سه) هرگاه f بر T انتگرالپذیر بوده و $c \leq f(x, y, z) \leq C$ ، که در آن c و C ثابت اند، آنگاه

$$cV \leq \iiint_T f(x, y, z) dV \leq CV,$$

که در آن V حجم T است. بخصوص، هرگاه $f(x, y, z) \geq 0$ ، آنگاه

$$\iiint_T f(x, y, z) dV \geq 0.$$

(چهار) هرگاه f بر T پیوسته بوده و T به دو زیرناحیه^۵ نرمال T_1 و T_2 بدون نقطه^۶ درونی مشترک تجزیه شده باشد، آنگاه

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \iiint_{T_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{T_2} f(x, y, z) dV.$$

محاسبه^۷ انتگرالهای سه‌گانه. برای محاسبه^۸ انتگرالهای سه‌گانه، مشابه قضایای ۲ و ۲' در بخش قبل مورد نیازند. آنها در رابطه با انتگرالهای مکرر هستند که انتگرالگیری اول بین حدود متغیر، که توابعی از یک متغیرند، و انتگرالگیری دوم بین حدود ثابت می‌باشد. در واقع، حدود ثابت نقاط انتهایی بازه^۹ $[a, b]$ یا $[c, d]$ اند که از تصویر ناحیه^{۱۰} انتگرالگیری روی محور x یا محور y به دست می‌آیند. در قضایای مشابه برای انتگرالهای سه‌گانه، انتگرالگیری اول مجدداً "بین حدود متغیر است، که این بار توابعی از دو متغیر می‌باشند، و انتگرالگیری دوم محاسبه^{۱۱} یک انتگرال مضاعف روی ناحیه^{۱۲} حاصل از تصویر ناحیه^{۱۳} سه‌بعدی T روی یکی از صفحات مختصات می‌باشد.

قضیه^{۱۴} ۵ (محاسبه^{۱۵} انتگرال سه‌گانه روی یک ناحیه^{۱۶} z -ساده). هرگاه $f(x, y, z)$ بر ناحیه^{۱۷} z -ساده^{۱۸} T تعریف شده باشد با $\theta_1(x, y) \leq z \leq \theta_2(x, y)$ پیوسته باشد، که در آن R_{xy} ناحیه^{۱۹} نرمالی در صفحه^{۲۰} xy است، آنگاه

$$(۵) \quad \iiint_T f(x, y, z) dV = \iint_{R_{xy}} dA \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

قضیه ۵' (محاسبه انتگرال سه‌گانه روی یک ناحیه y - ساده) . هرگاه $f(x, y, z)$ بر ناحیه y - ساده T تعریف شده با $(x, z) \in R_{xz}, h_1(x, z) \leq y \leq h_2(x, z)$ پیوسته باشد ، که در آن R_{xz} یک ناحیه نرمال در صفحه xz است ، آنگاه

$$(۵') \quad \iiint_T f(x, y, z) dV = \iint_{R_{xz}} dA \int_{h_1(x,z)}^{h_2(x,z)} f(x, y, z) dy.$$

قضیه ۵'' (محاسبه انتگرال سه‌گانه روی یک ناحیه x - ساده) . هرگاه $f(x, y, z)$ بر ناحیه x - ساده T تعریف شده با $(y, z) \in R_{yz}, k_1(y, z) \leq x \leq k_2(y, z)$ پیوسته باشد ، که در آن R_{yz} یک ناحیه نرمال در صفحه yz است ، آنگاه

$$(۵'') \quad \iiint_T f(x, y, z) dV = \iint_{R_{yz}} dA \int_{k_1(y,z)}^{k_2(y,z)} f(x, y, z) dx.$$

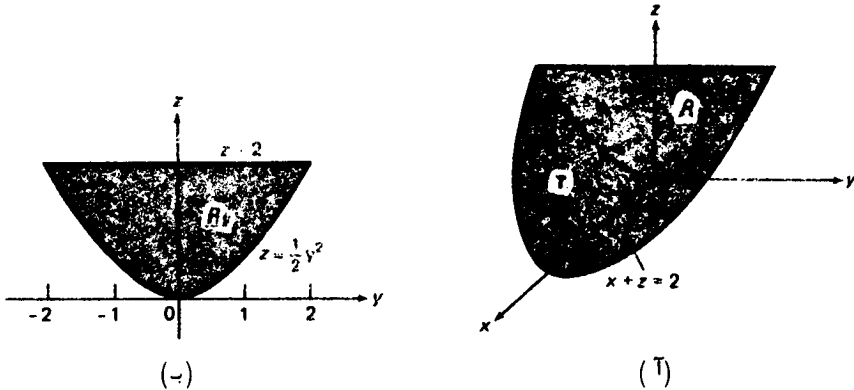
سعی کنید تفاوتها و تشابهات بین این قضایا را درک نمایید . ما برهان آنها را حذف کرده‌ایم .

فرض کنیم ناحیه R_{xy} ساده باشد؛ یعنی ، به طور قائم و به طور افقی ساده باشد . در این صورت ، انتگرال مضاعف (۵) را می‌توان به دو راه مختلف محاسبه نمود (قضیه ۳ ، صفحه ۱۳۳۲ ، را به یاد آورید) . همین امر در مورد انتگرال مضاعف (۵') یا (۵'') درست است اگر R_{xz} یا R_{yz} (نسبت به هر دو مختص در صفحه آن) ساده باشد . گاهی انتگرال سه‌گانه $\iiint f(x, y, z) dV$ را به شکل $\iiint f(x, y, z) dx dy dz$ می‌نویسیم . چه چیز به شما می‌گوید که این عبارت یک انتگرال مکرر نیست ؟

مثال ۳ . با استفاده از انتگرال سه‌گانه ، حجم ناحیه توپر T محدود به استوانه سهموی $z = \frac{1}{2}y^2$ ، صفحه $x = 0$ ، و صفحه $x + z = 2$ را بیابید [ر. ک . شکل ۱۸ (آ)] .

حل . چون T ، x - ساده ، y - ساده ، و z - ساده است ، V را می‌توان با استفاده از هر یک از فرمولهای (۵) ، (۵') ، و (۵'') به دست آورد . از فرمول (۵'') استفاده می‌کنیم . تصویر T روی صفحه yz ناحیه R_{yz} است که در شکل ۱۸ (ب) - نموده شده است و به سهمی $z = \frac{1}{2}y^2$

و خط $z = 2$ محدود می‌باشد. با بررسی شکل معلوم می‌شود که R_{yz} به طور قائم (و به طور افقی) ساده است، و مساوی مجموعهٔ نقاطی چون (y, z) است که $2 \geq z \geq \frac{1}{2}y^2, -2 \leq y \leq 2$



شکل ۱۸

لذا، T مجموعهٔ نقاطی چون (x, y, z) است به طوری که $0 \leq x \leq 2 - z, (y, z) \in R_{yz}$ ، زیرا x از مقدار ۰ روی وجه عقبی T (ناحیهٔ R_{yz}) به مقدار $2 - z$ روی وجه جلوی T (بخشی از صفحهٔ $x + z = 2$) تغییر می‌کند. لذا، طبق فرمول (۴) و فرمول (۵) به ازای $f(x, y, z) \equiv 1, k_1(y, z) \equiv 0$ ، و $k_2(y, z) = 2 - z$ معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} V &= \iiint_T dV = \iint_{R_{yz}} dA \int_0^{2-z} dx = \iint_{R_{yz}} (2 - z) dA \\ &= \int_{-2}^2 dy \int_{y^2/2}^2 (2 - z) dz = \int_{-2}^2 \left[2z - \frac{1}{2}z^2 \right]_{y^2/2}^2 dy \\ &= 2 \int_0^2 \left(2 - y^2 + \frac{1}{8}y^4 \right) dy, \end{aligned}$$

که در آن از زوج بودن انتگرالده استفاده کرده‌ایم. لذا، بالاخره داریم

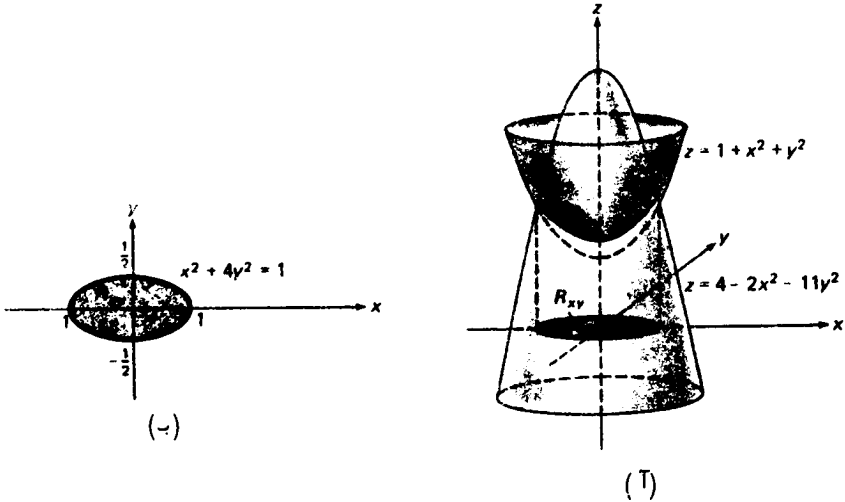
$$V = 2 \left[2y - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{40}y^5 \right]_0^2 = 2 \left(4 - \frac{8}{3} + \frac{32}{40} \right) = \frac{64}{15}.$$

مثال ۴. با استفاده از انتگرال سه‌گانه، حجم V ناحیهٔ توپر T محدود به سهمی‌گون دوار $z = 1 + x^2 + y^2$ و سهمی‌گون بیضوی $z = 4 - 2x^2 - 11y^2$ را بیابید [ر.ک. شکل ۱۹].

حل. مجدداً T ، x -ساده، y -ساده، و z -ساده است؛ در نتیجه، V را می‌توان با هریک از فرمولهای (۵)، (۵')، و (۵'') یافت. این بار از فرمول (۵) استفاده می‌کنیم. باحل معادلات سهمی‌گونها باهم، داریم $1 + x^2 + y^2 = 4 - 2x^2 - 11y^2$ یا معادلاً

$$(۶) \quad x^2 + 4y^2 = 1.$$

نمودار معادله (۶) در فضا یک استوانه بیضوی با خطوط جاری موازی محور z است. چون سهمی‌گونها در یک منحنی واقع بر این استوانه متقاطعند، ناحیه R_{xy} ، یعنی تصویر T روی صفحه xy ، به بیضی با همان معادله، طبق شکل ۱۹ (ب)، محدود می‌باشد. با بررسی شکل معلوم می‌شود که R_{xy} به طور افقی (و قائم) ساده است، و مجموعه نقاطی چون (x, y)



شکل ۱۹

است به طوری که $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$ ، $-\sqrt{1-4y^2} \leq x \leq \sqrt{1-4y^2}$. لذا، T مجموعه نقاطی چون (x, y, z) است که $(x, y) \in R_{xy}$ ، $1 + x^2 + y^2 \leq z \leq 4 - 2x^2 - 11y^2$ ، زیرا z از مقدار $1 + x^2 + y^2$ (وابسته به x و y) بر سهمی‌گون پایینی به مقدار $4 - 2x^2 - 11y^2$ بر سهمی‌گون بالایی تغییر می‌کند. لذا، طبق فرمول (۵) به ازای $f(x, y, z) \equiv 1$ ، پس از جانشانی $g_2(x, y) = 4 - 2x^2 - 11y^2$ و $g_1(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ ،

$$\begin{aligned} V &= \iiint_T dV = \iint_{R_{xy}} dA \int_{1+x^2+y^2}^{4-2x^2-11y^2} dz = \iint_{R_{xy}} (3 - 3x^2 - 12y^2) dA \\ &= 3 \int_{-1/2}^{1/2} dy \int_{-\sqrt{1-4y^2}}^{\sqrt{1-4y^2}} (1 - x^2 - 4y^2) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 3 \int_{-1/2}^{1/2} \left[(1-4y^2)x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{x=-\sqrt{1-4y^2}}^{\sqrt{1-4y^2}} dy \\
 &= 4 \int_{-1/2}^{1/2} (1-4y^2)^{3/2} dy = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 t dt = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt.
 \end{aligned}$$

لذا، به کمک مسائل ۱۳ و ۱۴، صفحه ۶۱۴، بالاخره خواهیم داشت

$$V = 4 \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{4}.$$

مثال ۵. هرگاه تابع $f(x, y, z)$ حاصل ضرب سه تابع یک متغیره مانند $X(x)Y(y)Z(z)$ بوده و ناحیه انتگرالگیری T یک جعبه باشد، یعنی $T = \{(x, y, z): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, A \leq z \leq B\}$ آنگاه انتگرال سه گانه f روی T به حاصل ضربی از سه انتگرال ساده تبدیل می شود. در واقع

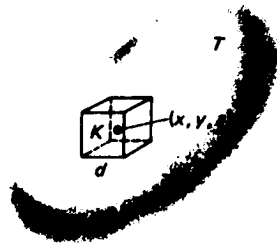
$$\begin{aligned}
 \iiint_T f(x, y, z) dV &= \int_a^b dx \int_c^d dy \int_A^B X(x)Y(y)Z(z) dz \\
 &= \left(\int_a^b X(x) dx \right) \left(\int_c^d Y(y) dy \right) \left(\int_A^B Z(z) dz \right).
 \end{aligned}$$

شرح جزئیات را به عنوان تمرین می گذاریم. صورت دوبعدی این فرمول چیست؟

محاسبه جرم از چگالی. حال، با استفاده از انتگرالهای سه گانه، جرم کل جسم توپر T را با دانستن تابع چگالی آن $\rho(x, y, z)$ تعیین می کنیم. فرض کنیم K مکعبی به طول یال d و به مرکز نقطه (x, y, z) از T بوده (ر. ک. شکل ۲۰)، و ΔV حجم و Δm جرم بخشی از T باشد که مشمول K است. در این صورت، طبق تعریف،

$$(Y) \quad \rho(x, y, z) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V},$$

که در آن $\rho(x, y, z) \geq 0$ ، زیرا جرم و چگالی جرم ذاتاً نامنفی اند. در اینجا این امر که اجسام بزرگ از تعداد زیادی ذرات تشکیل شده اند و فضای خالی بین آنها وجود دارند را نادیده گرفته، و ماده را "پیوسته" می گیریم. دلیل مجاز بودن این است که d می تواند در مقایسه با اجسام بزرگ خیلی کوچک و در مقایسه با اندازه اتم و مولکول بسیار بزرگ باشد. همچنین، از نظر فیزیکی واضح است که چگال (Y) را می توان در صورت تعویض مکعب K با ناحیه کلیتری شامل (x, y, z) که قطرش (ماکزیم فاصله بین نقاط K) به 0 نزدیک می شود نیز به دست آورد.



شکل ۲۰

حال، همانند تعریف انتگرال سه‌گانه روی T ، فرض کنیم ناحیه T (نرمال) با مجموعه‌ای از صفحات موازی محورهای مختصات به n زیرناحیه T_1, T_2, \dots, T_n تقسیم شده باشد. همچنین، ΔV_i و Δm_i حجم و جرم T_i بوده، و T تابع چگالی پیوسته $\rho(x, y, z)$ باشد. مقدار تابع ρ در زیرناحیه T_i ، دست‌کم وقتی T_i به قدر کافی کوچک باشد، مختصر تغییری می‌کند. لذا، چون ρ نسبت حدی جرم به حجم است، ظاهراً

$$\Delta m_i \approx \rho(p_i, q_i, r_i) \Delta V_i$$

که در آن (p_i, q_i, r_i) نقطه دلخواهی در T_i است، تقریب مناسبی می‌باشد. به‌علاوه، هرگاه M جرم کل T باشد، آنگاه

$$M = \sum_{i=1}^n \Delta m_i$$

در نتیجه، M با

$$(۸) \quad \sum_{i=1}^n \rho(p_i, q_i, r_i) \Delta V_i$$

یعنی مجموع جرم‌های تقریبی n زیرناحیه، تقریب می‌شود. پس معقول است که (۸)، یعنی مجموع ریمانی برای ρ بر T ، را تقریب مناسبی به M بگیریم، که در آن وقتی اندازه هر زیرناحیه T_i کوچکتر شود، یعنی اندازه μ افراز T به صفر نزدیک شود، تقریب بهتر خواهد شد. لذا، M را مساوی حد

$$M = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(p_i, q_i, r_i) \Delta V_i$$

قرار می‌دهیم؛ یعنی،

$$(۹) \quad M = \iiint_T \rho(x, y, z) dV$$

که در آن وجود انتگرال سه گانه از قضیه ۴ و فرض پیوستگی ρ نتیجه می شود.

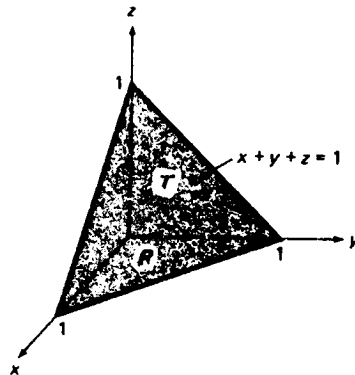
مثال ۶. جرم کل M چهاروجهی T در یکپشت اول محدود به صفحه $x + y + z = 1$ و صفحات مختصات را در صورتی بیابید که تابع چگالی

$$\rho(x, y, z) = \frac{16}{(1 + x + y + z)^3}$$

باشد.

حل. تصویر T روی صفحه xy مثلث R در ربع اول است که به خط $x + y = 1$ و محورهای مثبت مختصات محدود شده است (ر. ک. شکل ۲۱). لذا، طبق فرمول (۹) و قضیه ۵،

$$\begin{aligned} M &= \iiint_T \frac{16}{(1 + x + y + z)^3} dV = 16 \iint_R dA \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1 + x + y + z)^3} \\ &= 16 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[-\frac{1}{2(1 + x + y + z)^2} \right]_{z=0}^{1-x-y} dy \\ &= 8 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{(1 + x + y)^2} - \frac{1}{4} \right] dy \\ &= 8 \int_0^1 \left[-\frac{1}{1 + x + y} - \frac{y}{4} \right]_{y=0}^{1-x} dx \\ &= 8 \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x-3}{4} \right) dx = 8 \left[\ln(x+1) + \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4}x \right]_0^1 \\ &= 8 \ln 2 - 5 \approx 0.545. \quad \square \end{aligned}$$



شکل ۲۱

حالت دوبعدی. یک صفحه نازک با ضخامت نامحسوس را ورقه می‌نامیم. با استفاده از انتگرال مضاعف می‌توان جرم کل یک ورقه را در صورت معلوم بودن چگالی جرم $\rho(x, y)$ آن به دست آورد. این یک چگالی سطح است که به جای چگالی حجم، که با واحدی چون گرم بر سانتیمتر مکعب سنجیده می‌شود، با واحدی مانند گرم بر سانتیمتر مربع سنجیده خواهد شد. اساساً همان استدلال برای به دست آوردن فرمول (۹) نشان می‌دهد که جرم کل M ورقه عبارت است از

$$(۹) \quad M = \iint_R \rho(x, y) \, dA.$$

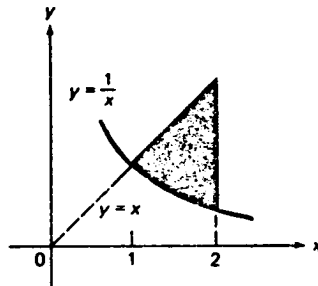
مثال ۷. یک ورقه به شکل ناحیه R محدود به خطوط $x = 2$ ، $y = x$ ، و هذلولی $xy = 1$ است، و تابع چگالی‌اش عبارت است از

$$\rho(x, y) = \frac{x^2}{y^2}.$$

جرم کل M ورقه را بیابید.

حل. ناحیه R به طور قائم ساده است، و با نامساویهای $1/x \leq y \leq x$ ، $1 \leq x \leq 2$ تعریف می‌شود (ر. ک. شکل ۲۲). لذا، طبق فرمول (۹)،

$$\begin{aligned} M &= \iint_R \frac{x^2}{y^2} \, dA = \int_1^2 dx \int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2} \, dy = \int_1^2 \left[-\frac{x^2}{y} \right]_{y=1/x}^x dx \\ &= \int_1^2 (x^3 - x) \, dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^2 = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$



شکل ۲۲

مسائل

انتگرال مکرر داده شده را حساب کنید.

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (xy + xz + yz) dx dy dz \quad \cdot ۲ \quad \checkmark$$

$$\int_0^3 \int_{-2}^0 \int_{-1}^1 dx dy dz \quad \cdot ۱ \quad \checkmark$$

$$\int_0^3 dy \int_0^y dx \int_1^{\frac{xy}{z}} dz \quad \cdot ۴ \quad \checkmark$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} dz \int_0^z (x + y + z) dy \quad \cdot ۳ \quad \checkmark$$

$$\int_{-1}^1 dz \int_0^z dx \int_0^{x+z} x^2 y z^2 dy \quad \cdot ۶ \quad \checkmark$$

$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_x^y xyz dz \quad \cdot ۵ \quad \checkmark$$

$$\int_0^\pi dz \int_0^{\pi/2} dy \int_1^2 x \cos y \sin z dx \quad \cdot ۸ \quad \checkmark$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 dz \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x+y+z}} \quad \cdot ۷ \quad \checkmark$$

$$\int_1^2 dz \int_0^{\ln z} dy \int_0^{\ln y} e^{x+y} dx \quad \cdot ۹ \quad \checkmark$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}} \quad \cdot ۱۰$$

انتگرال سه گانه داده شده را حساب کنید.

$$\iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) dV \quad \cdot ۱۱ \quad \checkmark$$

که در آن T جعبه محدود به صفحات $x=1$ ، $x=2$ ،

$$y=0$$
، $y=3$ ، $z=-1$ ، و $z=1$ است

$$\iiint_T xyz dV \quad \cdot ۱۲ \quad \checkmark$$

که در آن T جعبه محدود به صفحات $x=0$ ، $x=2$ ، $y=-1$ ، $y=3$ ،

$$z=1$$
 و $z=5$ است

$$\iiint_T x dV \quad \cdot ۱۳ \quad \checkmark$$

که در آن T منشور واقع در یکپهشت اول و محدود به صفحات مختصات

$$x+z=2$$
 و $y=5$ است

$$\iiint_T y dV \quad \cdot ۱۴ \quad \checkmark$$

که در آن T چهاروجهی واقع در یکپهشت اول و محدود به صفحه

$$x+y+z=1$$
 و صفحات مختصات است

$$\iiint_T z^2 dV \quad \cdot ۱۵ \quad \checkmark$$

که در آن T ناحیه توپیر محدود به کرات $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$

است

۱۶ ✓ $\iiint_T \frac{xy}{\sqrt{z}} dV$ ، که در آن T ناحیه توپر واقع در یکپشت اول و محدود به مخروط

بیضوی $z^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2$ و صفحات $x=0$ ، $y=0$ ، $z=1$ است

۱۷ ✓ $\iiint_T \cos y dV$ ، که در آن T ناحیه توپر واقع در یکپشت اول و محدود به سهمی گون

هذلولوی $z = xy$ ، صفحه $z=0$ ، و صفحه $x+y=\pi$ است

۱۸ ✓ $\iiint_T xe^{x+y+z} dV$ ، که در آن T جعبه محدود به صفحات مختصات و صفحات $x=1$ ،

$y=\ln 2$ ، و $z=\ln 3$ است .

با استفاده از انتگرال سه گانه ، حجم V ناحیه توپر ذکر شده T را بیابید .

۱۹ ✓ T به صفحه $6x + 2y + 3z = 12$ و صفحات مختصات محدود است

۲۰ ✓ T به صفحه $z = 10 - 2x - 5y$ و صفحات $x=0$ ، $y=1$ ، $y=x$ ، و $z=0$ محدود

است

۲۱ ✓ T به سهمی گونهای دوار $z = x^2 + y^2$ و $z = 1 - x^2 - y^2$ محدود است

۲۲ ✓ T به سهمی گون دوار $2z = x^2 + y^2$ و کره $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ محدود است

۲۳ ✓ T به استوانه های سهمی $z = 4 - x^2$ و $z = 2 + x^2$ و صفحات $y = -2$ و $y = 3$ محدود

است

۲۴ ✓ T به سهمی گونهای $z = x^2 + y^2$ و $z = 2x^2 + y^2$ و صفحات $x=y$ ، $x=3y$ ، و $y=1$

محدود است .

جرم کل مکعب T محدود به صفحات $x = \pm 1$ ، $y = \pm 1$ ، و $z = \pm 1$ را در صورتی بیابید که

تابع چگالی به صورت زیر باشد .

$$25 \quad \rho(x, y, z) = \cos(\pi x/2) \cos(\pi y/2) \cos(\pi z/2) \quad \checkmark$$

$$26 \quad \rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \checkmark$$

مثل مثال ۶ ، فرض کنید T چهاروجهی واقع در یکپشت اول و محدود به صفحه $x + y + z = 1$

و صفحات مختصات باشد . جرم کل T را در صورتی بیابید که تابع چگالی به صورت زیر

باشد .

$$27 \quad \rho(x, y, z) = x + y + z \quad \checkmark$$

$$28 \quad \rho(x, y, z) = xyz \quad \checkmark$$

۲۹ . جرم کل یک ورقه به شکل ناحیه بین سهمیهای $y = x^2$ و $x = y^2$ را در صورتی بیابید

که تابع چگالی اش $\rho(x, y) = xy$ باشد .

۳۰. چگالی یک ورقه مربع شکل به طول ضلع 1 ft در نقطه متغیر P با مجذور فاصله P تا مرکز مربع (نقطه برخورد اقطار) متناسب است. جرم کل ورقه را در صورتی بیابید که چگالی در گوشه‌های مربع 1 اونس بر اینچ مربع باشد.

۳۱. جسم T به شکل ناحیه سه‌بعدی R دارای چگالی بار الکتریکی $\rho(x, y, z)$ است، برای Q ، یعنی بار کل در T ، فرمول بنویسید. Q را در صورتی بیابید که $\rho(x, y, z) = xy - 2yz$ و T جعبه محدود به صفحات $x=0, x=2, y=1, y=4, z=-1, z=2$ باشد. (توجه کنید که بار الکتریکی، به خلاف جرم، می‌تواند مقادیر منفی به خود بگیرد.)

۳۲. مقدار میانگین تابع $f(x, y, z)$ روی ناحیه سه‌بعدی T به حجم V با

$$\frac{1}{V} \iiint_T f(x, y, z) dV$$

تعریف می‌شود (این تعمیم سه‌بعدی عبارت

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

برای مقدار میانگین یک تابع یک‌متغیره است). مقدار میانگین $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ روی چهاروجهی T محدود به صفحه $x + y + z = 1$ و صفحات مختصات را بیابید. چگونه از قبل بدانیم که دست‌کم یک نقطه در T هست که f در آن مقدار میانگین خود را روی T می‌گیرد؟ این نقطه را پیدا نمایید.

۳۰.۱۴ مرکز جرم و مرکز گون

با تعمیم ایده‌های مکانیک نیوتنی به دستگاهی مرکب از n ذره P_1, P_2, \dots, P_n در فضا آغاز می‌کنیم. فرض کنیم $\mathbf{r}_i = \overline{OP}_i$ بردار موضع P_i نسبت به نقطه ثابت O بوده، و m_i جرم P_i باشد. همچنین، بر P_i نیروی خارجی \mathbf{F}_i ، یعنی نیرویی خارج دستگاه n ذره‌ای، و نیروهایی از طرف $n-1$ ذره دیگر اثر نمایند؛ مثلاً، ذرات برهم نیروهای ثقلی وارد آورند. فرض کنیم \mathbf{F}_{ij} (نیروی وارد بر P_i از سوی ذره P_j) باشد. در این صورت، طبق قانون دوم نیوتن، حرکت P_i تحت تسلط معادله دیفرانسیل برداری

$$(1) \quad m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

است، که در آن t زمان بوده و علامت $\sum_{j=1}^n$ ، با پریم، یعنی مجموع روی تمام زیرنویسهای j جز خود i (ذره P_i نیرویی بر خودش وارد نمی‌کند). به ازای هر ذره P_i یک معادله به شکل (۱) وجود دارد، و برای به دست آوردن معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت دستگاه

ذرات P_1, P_2, \dots, P_n رویهم ، معادلات (۱) به ازای $i = 1$ تا n را به هم می افزاییم . از این نتیجه می شود که

$$(۲) \quad \sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i + \sum_{i,j=1}^n \mathbf{F}_{ij},$$

که در آن علامت $\sum_{i,j=1}^n$ ، با پریم ، یعنی مجموع روی تمام جفت‌های i و j که $i \neq j$. لذا ، مثلاً " ،

$$(۳) \quad \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32}.$$

معادله (۲) ظاهر پیچیده‌ای دارد ، ولی آن را می توان با استفاده از قانون سوم نیوتن ، که می گوید " عمل مساوی عکس العمل است " ، بی درنگ ساده کرد . به طور مشخص ، نیروی وارد بر ذره j م از سوی ذره i م مساوی و مخالف نیروی وارد بر ذره i م از سوی ذره j م است ؛ یعنی ،

$$\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}.$$

پس نتیجه می شود که مجموع $\sum_{i,j=1}^n \mathbf{F}_{ij}$ مساوی $\mathbf{0}$ است ، زیرا جملات دو به دو حذف می شوند ؛ مثلاً " ، از تجدید آرایش جملات (۳) معلوم می شود که

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{F}_{ij} &= (\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21}) + (\mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{31}) + (\mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{32}) \\ &= (\mathbf{F}_{12} - \mathbf{F}_{12}) + (\mathbf{F}_{13} - \mathbf{F}_{13}) + (\mathbf{F}_{23} - \mathbf{F}_{23}) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

لذا ، معادله (۲) به

$$\sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i,$$

یا معادلاً "

$$(۴) \quad \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i .$$

تحویل می شود . بردار زیر را معرفی می کنیم :

$$(۵) \quad \bar{\mathbf{r}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{M},$$

که در آن

$$(۵) \quad M = \sum_{i=1}^n m_i$$

جرم کل دستگاه، یعنی مجموع اجرام تمام ذرات است. در این صورت، $\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i = M\bar{\mathbf{r}}$ ، و معادله (۴) را می‌توان به شکل فشرده‌تر زیر نوشت:

$$(۶) \quad M \frac{d^2\bar{\mathbf{r}}}{dt^2} = \mathbf{F},$$

که در آن

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

برآیند تمام نیروهای خارجی وارد بر تک تک ذرات $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ است. بنا بر (۶)، و صرف نظر از حرکت ذرات نسبت به هم، دستگاه کلاً "مانند ذره واحدی به جرم M و بردار موضع $\bar{\mathbf{r}}$ که بر آن نیروی \mathbf{F} وارد است حرکت می‌کند. نقطه با بردار موضع $\bar{\mathbf{r}}$ مرکز جرم دستگاه n ذره‌ای نام دارد.

اگر نیروی خارجی \mathbf{F} صفر باشد، می‌توان از معادله (۶) فوراً انتگرال گرفت

و ابتدا

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} = \mathbf{c}_1$$

و سپس

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2$$

را به دست آورد، که در آن بردارهای ثابت انتگرالگیری می‌باشند. هرگاه مرکز جرم سرعت اولیه صفر داشته باشد، آنگاه $\bar{\mathbf{v}}|_{t=0} = \mathbf{0}$ ؛ در نتیجه، $\mathbf{c}_1 = \mathbf{0}$ و $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{c}_2$ ، که در این صورت مرکز جرم ثابت می‌ماند. حتی در این حالت نیز مرکز جرم مهم است. مثلاً، می‌توان نشان داد که دستگاه مرکب از n ذره وصل شده به یک صفحه نازک فلز با وزن نامحسوس روی میله تیزی که در مرکز جرم دستگاه قرار دارد به حال تعادل درمی‌آید، ولی در هر نقطه دیگر خواهد افتاد. در این وضع، نقطه تعادل یک ورقه به شکل ناحیه مسطحی به چگالی جرم $\rho(x, y)$ نیز مرکز جرمش (به صورت تعریف شده در زیر) می‌باشد. در کاربردهای مهندسی، نیروی وارد بر یک ساختار (مثلاً، پل یا ساختمان) اغلب نیروی ثقل است، و در این وضع مرکز جرم را معمولاً "مرکز ثقل" می‌نامند.

به آسانی می‌توان مختصات مرکز جرم یک دستگاه از ذرات را برحسب مختصات خود ذرات بیان کرد. دستگاه مختصات قائم x, y, z با مبدا O را معرفی کرده، فرض

می‌کنیم $\bar{r} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ و

$$r_i = (x_i, y_i, z_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

در این صورت، اگر از طرفین (۵) مؤلفه گرفته و از (۵') استفاده کنیم، فوراً "در خواهیم یافت که

$$(Y) \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

مثال ۱. یک دستگاه ذرات از سه جرم $m_1 = 3$ ، $m_2 = 4$ ، و $m_3 = 2$ در نقاطی به بردارهای موضع $r_1 = (2, -1, 3)$ ، $r_2 = (5, 2, 4)$ ، و $r_3 = (-2, 0, 1)$ تشکیل شده است. مرکز جرم آن را بیابید.

حل. در اینجا $x_1 = 2$ ، $x_2 = 5$ ، و $x_3 = -2$ ؛ لذا، اولین فرمول (Y) نتیجه می‌دهد که

$$\bar{x} = \frac{3(2) + 4(5) + 2(-2)}{3 + 4 + 2} = \frac{22}{9}.$$

به همین نحو،

$$\bar{y} = \frac{3(-1) + 4(2) + 2(0)}{3 + 4 + 2} = \frac{5}{9}$$

و

$$\bar{z} = \frac{3(3) + 4(4) + 2(1)}{3 + 4 + 2} = \frac{27}{9} = 3.$$

گشتاورهای یک دستگاه از ذرات، صورتهای عبارت (Y) برای مختصات \bar{x} ، \bar{y} ، و \bar{z} مرکز جرم گشتاورهای دستگاه S مرکب از ذرات P_1, P_2, \dots, P_n نامیده می‌شوند. به‌طور مشخص، چون اعداد x_i ، y_i ، و z_i صرف نظر از علامتشان فواصل بین P_i و صفحات yz ، xz ، و xy اند، $\sum m_i x_i$ را گشتاور S نسبت به صفحه yz ، $\sum m_i y_i$ را گشتاور S نسبت به صفحه xz ، و $\sum m_i z_i$ را گشتاور S نسبت به صفحه xy می‌نامیم. (برای اختصار، حدود جمع‌بندی حذف شده‌اند). هرگاه ذرات همه در یک صفحه باشند (آن را صفحه xy می‌گیریم)، آنگاه x_i و y_i صرف نظر از علامت، فواصل بین P_i و محورهای x و y اند، و $\sum m_i x_i$ را گشتاور S نسبت

به محور y و $\sum m_i y_i$ را گشتاور S نسبت به محور x می‌نامیم. با تقسیم این گشتاورها بر جرم کل $\sum m_i$ دستگاه S ، می‌توان به مختصات مرکز جرم $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ در صفحه $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ در فضا) بازگشت. گشتاورهای $\sum m_i x_i$ ، $\sum m_i y_i$ ، و $\sum m_i z_i$ را گشتاورهای اول نیز می‌نامند تا با گشتاورهای دوم یا گشتاورهای ماند که در بخش ۵.۱۴ معرفی شده‌اند خلط نشود.

یک جسم جامد را می‌توان ناحیه‌ای سه‌بعدی مانند T گرفت که بر آن چگالی جرم پیوسته $\rho(x, y, z)$ تعریف شده است، که اگر جسم همگن باشد، ثابت $\rho(x, y, z) \equiv \rho$. برای یافتن مرکز جرم T ، آن را با رسم سه مجموعه از صفحات موازی صفحات مختصات، مثل صفحه 13434 در تعریف انتگرال سه‌گانه، به تعداد زیادی زیر ناحیه مانند T_1, T_2, \dots, T_n به حجمهای $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$ تقسیم می‌کنیم. فرض کنیم (x_i, y_i, z_i) نقطه دلخواهی در T_i باشد. پس T_i را می‌توان ذره‌ای به جرم $\Delta m_i \approx \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$ واقع در (x_i, y_i, z_i) گرفت. لذا، مرکز جرم T با تقریبی مناسب همان مرکز جرم دستگاه n ذره‌ای T_1, T_2, \dots, T_n می‌باشد. فرض کنیم μ اندازه مش افراز T باشد. در این صورت، مرکز جرم T موضع حدی مرکز جرم این دستگاه ذرات، وقتی $\mu \rightarrow 0$ ، تعریف می‌شود. لذا، به کمک (γ) معلوم می‌شود که مختصات مرکز جرم T از فرمولهای زیر به دست می‌آیند:

$$\bar{x} = \frac{\lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n x_i \Delta m_i}{\lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta m_i} = \frac{\lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n x_i \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i}{\lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n y_i \Delta m_i}{\lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta m_i} = \frac{\lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n y_i \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i}{\lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i}$$

$$\bar{z} = \frac{\lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n z_i \Delta m_i}{\lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta m_i} = \frac{\lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n z_i \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i}{\lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i}$$

اما هر مجموع شامل ρ یک مجموع ریمان است و، وقتی $\mu \rightarrow 0$ ، به یک انتگرال سه‌گانه روی T نزدیک می‌شود (ناحیه T نرمال فرض می‌شود). در واقع،

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i = \iiint_T \rho(x, y, z) dV,$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n x_i \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i = \iiint_T x \rho(x, y, z) dV,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n y_i \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i = \iiint_T y \rho(x, y, z) dV,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n z_i \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i = \iiint_T z \rho(x, y, z) dV.$$

پس نتیجه می شود که

$$(۸) \quad \bar{x} = \frac{\iiint_T x \rho dV}{\iiint_T \rho dV}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_T y \rho dV}{\iiint_T \rho dV}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_T z \rho dV}{\iiint_T \rho dV},$$

که در آن شناسه های تابع چگالی ρ به خاطر اختصار حذف شده اند. البته، انتگرال $\iiint_T \rho dV$ در هر سه مخرج همان جرم M جسم است (صفحه ۱۳۵۰ را به یاد آورید). لذا، می توان فرمولهای (۸) را به صورت فشرده تر زیر نوشت:

$$(۹) \quad \bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_T x \rho dV, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_T y \rho dV, \quad \bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_T z \rho dV.$$

اگر جسم همگن باشد، چگالی ρ مقدار ثابتی دارد. در این صورت، اولین فرمول

(۸) به

$$\bar{x} = \frac{\rho \iiint_T x dV}{\rho \iiint_T dV} = \frac{\iiint_T x dV}{\iiint_T dV}$$

تحویل می شود، و به همین نحو داریم

$$\bar{y} = \frac{\iiint_T y dV}{\iiint_T dV}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_T z dV}{\iiint_T dV}$$

اما $\iiint_V dV = V$ ، که در آن V حجم T است؛ و لذا،

$$(۹) \quad \bar{x} = \frac{1}{V} \iiint_T x dV, \quad \bar{y} = \frac{1}{V} \iiint_T y dV, \quad \bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_T z dV \quad (\text{چگالی ثابت}) .$$

در این حالت، مرکز جرم مرکز گون ناحیه توپیر T نام دارد، و صرفاً یک مفهوم هندسی بوده و از ایده فیزیکی جرم کاملاً مستقل است.

حالت دوبعدی. در یک صفحه نازک یا ورقه، به جای ناحیه توپیر T و تابع چگالی سببدهی $\rho(x, y, z)$ یک ناحیه R و تابع چگالی دوبعدی $\rho(x, y)$ داریم. پس همان استدلالها نشان می دهند که مرکز جرم ورقه به مختصات زیر است:

$$(۱۰) \quad \bar{x} = \frac{1}{M} \iint_R x \rho dA, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iint_R y \rho dA,$$

که در آنها $M = \iint_R \rho dA$ جرم کل ورقه است. هرگاه ورقه همگن باشد، آنگاه ثابت $\rho(x, y) \equiv$ و این فرمولها به صورت زیر درمی آیند:

$$(۱۰') \quad \bar{x} = \frac{1}{A} \iint_R x dA, \quad \bar{y} = \frac{1}{A} \iint_R y dA \quad (\text{چگالی ثابت})$$

که در آن A مساحت R می باشد. در این حالت مجدداً مرکز جرم را مرکز گون ناحیه R می نامند، و این یک مفهوم کاملاً هندسی می باشد.

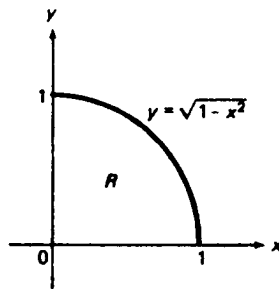
گشتاورهای یک توزیع جرم پیوسته. در جسم T یا ورقه R ، مثل یک دستگاه از ذرات، کمیات مختلفی به نام گشتاور داریم، ولی به جای مجموع به صورت انتگرال می باشند. به طور مشخص، $M_{yz} = \iiint_T x \rho dV$ گشتاور T نسبت به صفحه yz ، $M_{xz} = \iiint_T y \rho dV$ گشتاور T نسبت به صفحه xz ، و $M_{xy} = \iiint_T z \rho dV$ گشتاور T نسبت به صفحه xy است. همچنین،

$M_x = \iint_R y \rho dA$ گشتاور R نسبت به محور x و $M_y = \iint_R x \rho dA$ گشتاور R نسبت به محور y می باشد. فرمولهای (۹) و (۱۰) برحسب گشتاورها خواهند شد

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}.$$

مثال ۲. یک ورقه به شکل قطاع مستدیر R در ربع اول به محورهای مختصات و قوسی از دایره $x^2 + y^2 = 1$ یکه^۴ محدود است (ر. ک. شکل ۲۳). مرکز جرم (\bar{x}, \bar{y}) ورقه را در صورتی بیابید که تابع چگالی $\rho(x, y) = x^2y$ باشد.



شکل ۲۳

حل. جرم کل ورقه عبارت است از

$$\begin{aligned} M &= \iint_R \rho \, dA = \iint_R x^2y \, dA = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2y \, dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2y^2 \right]_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2(1-x^2) \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

گشتاور نسبت به محور x مساوی است با

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_R y\rho \, dA = \iint_R x^2y^2 \, dA = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2y^2 \, dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3} x^2y^3 \right]_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 x^2(1-x^2)^{3/2} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^4 t \, dt = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{16} t - \frac{1}{64} \sin 4t + \frac{1}{48} \sin^3 2t \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{96}, \end{aligned}$$

و این با جانشانی $x = \sin t$ و مثال ۳، صفحه ۶۱۷، به دست می‌آید. گشتاور دیگر، نسبت به محور y ، مساوی است با

$$M_y = \iint_R x \rho dA = \iint_R x^3 y dA = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^3 y dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^3 y^2 \right]_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x^3 (1-x^2) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{6} x^6 \right]_0^1 = \frac{1}{24}.$$

در نتیجه ،

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{12}} = \frac{5}{8} = 0.625, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{1}{96}\pi}{\frac{1}{12}} = \frac{5\pi}{32} \approx 0.491,$$

لذا، $(\frac{5}{8}, \frac{5}{32}\pi)$ مرکز جرم ورقه بوده ، و ورقه روی یک میله قائم در این نقطه به صورت تعادل درمی آید . توجه کنید که ، حتی اگر ناحیه R نسبت به خط $y = x$ متقارن باشد ، $\bar{y} < \bar{x}$. این به خاطر آن است که جرم نزدیک محور x تا محور y بیشتر می باشد (چرا؟) .

مثال ۳ . فرض کنید R همان ناحیه مثال ۲ باشد . مرکز گون R را پیدا نمایید .

حل . چون تابع چگالی ثابت است ، تقارن R نسبت به خط $y = x$ تضمین می کند که $\bar{x} = \bar{y}$ (ر . ک . مسئله ۴) . بنابر فرمول اول (۱۰) ،

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_R x dA = \frac{4}{\pi} \iint_R x dA,$$

زیرا A ، یعنی مساحت ناحیه R ، یکچهارم مساحت π محصور به دایره یکه است . با محاسبه انتگرال مضاعف ، خواهیم داشت

$$\iint_R x dA = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x dy = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} x dx = \left[-\frac{1}{3} (1-x^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

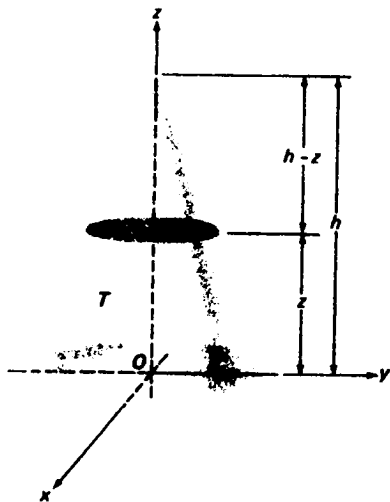
بنابراین ،

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4}{3\pi} \approx 0.424,$$

و مرکز گون عبارت خواهد بود از $(4/3\pi, 4/3\pi)$.

مثال ۴ . مرکز جرم مخروط مستدیر قائم توپر T به ارتفاع h و شعاع قاعده a را در صورتی بیابید که چگالی در هر نقطه از T با فاصله آن تا قاعده T متناسب باشد .

حل. با اختیار محور z در امتداد محور T و قاعده T در صفحه xy ، مثل شکل ۲۴، داریم $\rho(x, y, z) = cz$ ، که در آن c یک ثابت مثبت است. چون مرکز جرم هر مقطع عرضی مخروط



شکل ۲۴

T با صفحه‌ای موازی صفحه xy روی محور z است، همین امر در مورد خود T صادق می‌باشد (بیشتر توضیح دهید). بنابراین، $\bar{x} = \bar{y} = 0$ ، و فقط باید

$$(11) \quad \bar{z} = \frac{\iiint_T z \rho dV}{\iiint_T \rho dV} = \frac{c \iiint_T z^2 dV}{c \iiint_T z dV} = \frac{\iiint_T z^2 dV}{\iiint_T z dV}$$

را حساب کنیم (چون ثابت c حذف می‌شود، مقدارش اثری بر جواب ندارد). ساده‌ترین راه برای محاسبه انتگرال سه‌گانه استفاده از روش مقاطع عرضی است. به‌طور مشخص، فرض کنیم $A(z)$ مساحت مقطع عرضی T در z باشد؛ یعنی، مساحت قرص مستدیر به شعاع $r = r(z)$ که مقطع صفحه مار بر نقطه $(0, 0, z)$ و موازی با صفحه xy با T است. بنابر تشابه مثلثها،

$$\frac{r}{a} = \frac{h-z}{h}$$

در نتیجه،

$$(12) \quad A(z) = \pi r^2 = \frac{\pi a^2}{h^2} (h-z)^2.$$

در این صورت، همانطور که روش مقاطع عرضی می‌گوید که حجم مخروط T مساوی است با

$$V = \iiint_T dV = \int_0^h A(z) dz$$

(تحقیق کنید که از این $V = \frac{1}{3}\pi a^2 h$ نتیجه می‌شود)، همان روش به ما می‌گوید که انتگرال تابع $f(z)$ روی T که فقط به z وابسته است مساوی است با

$$(13) \quad \iiint_T f(z) dV = \int_0^h f(z) A(z) dz.$$

برای اثبات صورتیتر این، ملاحظه می‌کنیم که T یک ناحیه x -ساده است؛ و در واقع،

$$T = \{(x, y, z) : (y, z) \in R_{yz}, k_1(y, z) \leq x \leq k_2(y, z)\},$$

که در آن $R_{yz} = \{(y, z) : 0 \leq z \leq h, \theta_1(z) \leq y \leq \theta_2(z)\}$ ؛ توابع θ_1 و θ_2 بر $[0, h]$ پیوسته‌اند، ولی k_1 و k_2 بر R_{yz} پیوسته می‌باشند (لازم نیست این توابع را مشخص کنیم، ولی به‌خاطر تقارن داریم $k_1 = -k_2$ و $\theta_1 = -\theta_2$). بنابراین، طبق قضیه ۵''، صفحه ۱۳۲۶،

$$(14) \quad \begin{aligned} \iiint_T f(z) dV &= \iint_{R_{yz}} dA \int_{k_1(y,z)}^{k_2(y,z)} f(z) dx \\ &= \int_0^h f(z) \left(\int_{\theta_1(z)}^{\theta_2(z)} [k_2(y, z) - k_1(y, z)] dy \right) dz. \end{aligned}$$

اما

$$\int_{\theta_1(z)}^{\theta_2(z)} [k_2(y, z) - k_1(y, z)] dy = A(z),$$

که در آن $A(z)$ مساحت مقطع عرضی T در z است؛ و در نتیجه، همانطور که پیش‌بینی شد، (۱۴) به (۱۳) تحویل می‌شود.

حال، به محاسبه z بازگشته، از (۱۲) و (۱۳) نتیجه می‌گیریم که

$$\iiint_T z dV = \frac{\pi a^2}{h^2} \int_0^h z(h-z)^2 dz = \frac{\pi a^2}{h^2} \int_0^h (h^2 z - 2hz^2 + z^3) dz$$

$$= \frac{\pi a^2}{h^2} \left[\frac{1}{2} h^2 z^2 - \frac{2}{3} h z^3 + \frac{1}{4} z^4 \right]_0^h = \frac{1}{12} \pi a^2 h^2,$$

$$\iiint_T z^2 dV = \frac{\pi a^2}{h^2} \int_0^h z^2(h-z)^2 dz = \frac{\pi a^2}{h^2} \int_0^h (h^2 z^2 - 2hz^3 + z^4) dz$$

$$= \frac{\pi a^2}{h^2} \left[\frac{1}{3} h^2 z^3 - \frac{1}{2} h z^4 + \frac{1}{5} z^5 \right]_0^h = \frac{1}{30} \pi a^2 h^3,$$

و در این صورت از (۱۱) نتیجه می‌شود که

$$\bar{z} = \frac{\frac{1}{30} \pi a^2 h^3}{\frac{1}{12} \pi a^2 h^2} = \frac{2}{5} h.$$

لذا، $(0, 0, \frac{2}{5}h)$ مرکز جرم مخروط T می‌باشد.

مثال ۵. فرض کنیم T همان مخروط توپر مثال ۴ ولی با چگالی ثابت باشد. مرکز گون T را پیدا نمایید.

حل. مثل قبل بنابر تقارن داریم $\bar{x} = \bar{y} = 0$ ، ولی، طبق فرمول سوم (۹')،

$$\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_T z \, dV.$$

حجم T مساوی است با $V = \frac{1}{3} \pi a^2 h$ و، همانطور که اینک نشان دادیم،

$$\iiint_T z \, dV = \frac{1}{12} \pi a^2 h^2,$$

بنابراین،

$$\bar{z} = \frac{\frac{1}{12} \pi a^2 h^2}{\frac{1}{3} \pi a^2 h} = \frac{1}{4} h,$$

و مرکز گون مساوی $(0, 0, \frac{1}{4}h)$ می‌باشد. چرا مرکز گون از مرکز جرم به دست آمده در مثال ۴ پایین‌تر است؟

مسائل

- دستگاهی از چهار ذره به جرمهای $m_1 = 6$ ، $m_2 = 1$ ، $m_3 = 2$ ، و $m_4 = 5$ با بردارهای موضع $\mathbf{r}_1 = (0, 3, 4)$ ، $\mathbf{r}_2 = (-1, 0, 6)$ ، $\mathbf{r}_3 = (2, -1, 1)$ ، و $\mathbf{r}_4 = (5, 8, 0)$ تشکیل شده‌است. گشتاورهای M_{xy} ، M_{xz} ، و M_{yz} دستگاه را نسبت به صفحات مختصات و نیز مرکز جرم $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ آن را بیابید.
- فرض کنید $\bar{\mathbf{r}}_1$ و $\bar{\mathbf{r}}_2$ بردارهای موضع مراکز جرم دو دستگاه از ذرات S_1 و S_2 باشند. نشان دهید که بردار موضع دستگاه S حاصل از تلفیق S_1 و S_2 عبارت است از

و S_2, S_1 دستگاههای کل جرمهای M در آن M_1, M_2 ، که $\bar{r} = (M_1\bar{r}_1 + M_2\bar{r}_2)/M$ می باشند.

۳. کودکی به وزن 50 lb از انتهای یک تخته صاف به طول 12 ft و وزن 25 lb واقع روی یک حوض یخزده به طرف دیگر می رود. برای تخته چه رخ می دهد؟ یخ لیز است، ولی بین کفشهای کودک و تخته کشش وجود دارد.

۴. نشان دهید هرگاه ناحیه T توپر نسبت به صفحه Π متقارن باشد، آنگاه مرکز گون T بر Π واقع است. نشان دهید هرگاه ناحیه R مسطح نسبت به خط L متقارن باشد، آنگاه مرکز گون R بر L واقع می باشد.

۵. فرض کنید ناحیه R مسطح به مساحت A به دوزیر ناحیه R_1 و R_2 به مساحت A_1 و A_2 بدون نقطه درونی مشترک مثل شکل ۸، صفحه ۱۳۲۴، تجزیه شده باشد. نشان دهید هرگاه مرکز گونهای R, R_1, R_2 مساوی (\bar{x}, \bar{y}) ، (\bar{x}_1, \bar{y}_1) ، و (\bar{x}_2, \bar{y}_2) باشند، آنگاه

$$\bar{x} = \frac{1}{A}(A_1\bar{x}_1 + A_2\bar{x}_2), \quad \bar{y} = \frac{1}{A}(A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2).$$

نشان دهید که اگر R ورقه‌ای به چگالی متغیر باشد، مختصات مرکز جرم ورقه از همین فرمولها به وسیله تعویض A, A_1, A_2 با M, M_1, M_2 ، یعنی جرمهای R, R_1, R_2 به دست می آیند.

۶. مشابه مسئله ۵ را برای یک ناحیه توپر و برای یک جسم توپر با چگالی متغیر بیان و اثبات نمایید.

۷. فرض کنید ناحیه R مسطح محدود به خطوط $x=a$ و $x=b$ ، محور x ، و منحنی $y=f(x)$ ($a \leq x \leq b$) باشد، که f بر $[a, b]$ پیوسته و نامنفی است. نشان دهید که مرکز گون R نقطه‌ای است به مختصات

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x f(x) dx, \quad \bar{y} = \frac{1}{2A} \int_a^b [f(x)]^2 dx,$$

(یک)

که در آنها $A = \int_a^b f(x) dx$ مساحت R می باشد.

۸. مثال ۲ را در صورتی حل کنید که تابع چگالی $\rho(x, y) = x^2 + y^2$ باشد. مرکز گون ناحیه R مسطح محدود به منحنیهای زیر را بیابید.

۹. سهمیهای $y = x^2$ و $x = y^2$ ✓

۱۰. منحنی $y = 1 - x^3$ و محورهای مختصات ✓

۱۱. بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ و محورهای مثبت مختصات ✓

۱۲. بخشی از منحنی $y = \cos x$ از $x = -\pi/2$ تا $x = \pi/2$ و محور x ✓

۱۳ ✓ دوایر $x^2 + y^2 = 4$ و $(x-1)^2 + y^2 = 1$

۱۴ ✓ منحنی $y = \sin x$ و خط $y = 2x/\pi$

۱۵ ✓ منحنی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ و محورهای مختصات

۱۶ ✓ منحنی $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ و محورهای مثبت مختصات

۱۷ ✓ مرکز گون ناحیه بی کران R زیر منحنی $y = e^x$ در ربع دوم را با یک انتگرال مجازی پیدا کنید.

۱۸ ✓ گشتاور اول یک قرص مستدیر به شعاع a را نسبت به یکی از خطوط مماسش بیابید.

۱۹ یک جعبه مکعب شکل به طول یال 2 ft سر ندارد. مرکز گون آن کجاست؟

۲۰ نشان دهید که نیروی F وارد بر یک صفحه قائم شناور R عبارت است از $F = \delta Ah$ ، که در آن δ چگالی وزن مایع، A مساحت R ، و h عمق مرکز گون R زیر سطح مایع می باشد.

راهنمایی: بحث مربوطه در بخش ۷.۸ را به یاد آورید.

مرکز جرم جسم محدود به صفحات مختصات و صفحات $x=1$ ، $y=2$ ، و $y+z=4$ را در صورتی بیابید که تابع چگالی به صورت زیر باشد.

۲۱ ✓ $\rho(x, y, z) \equiv 16$ ۲۲ ✓ $\rho(x, y, z) = x$

۲۳ ✓ $\rho(x, y, z) = xy$ ۲۴ ✓ $\rho(x, y, z) = xyz$

مرکز گون ناحیه توپر T محدود به سطوح زیر را بیابید.

۲۵ استوانه سهموی $z = \frac{1}{2}y^2$ ، صفحه $x=0$ ، و صفحه $x+z=2$ (ر. ک. مثال ۳، صفحه ۱۳۴۶)

۲۶ صفحه $x+y+z=1$ و صفحات مختصات

۲۷ کرات $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ (ر. ک. مسئله ۱۵، صفحه ۱۳۵۳)

۲۸ سهمی گون دوار $z^2 = x^2 + y^2$ و کره $z^2 = 3 - x^2 - y^2$ (ر. ک. مسئله ۲۲، صفحه ۱۳۵۴)

۲۹ بیضی گون $1 = (x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2)$ و صفحات مختصات در یکپشت اول.

۳۰ سهمی گون هذلولوی $z = xy$ و صفحات $x=2$ و $y=3$ در یکپشت اول.

۳۱ مرکز جرم جسم T در مسئله ۲۷ اگر تابع چگالی $\rho(x, y, z) = z$ باشد.

۳۲ بشکه‌ای به شکل ناحیه توپر T و یا حجم V از مایعی به چگالی ρ پر شده است. نشان

دهید کار W لازم برای پمپاژ تمام مایع از سر بشکه مساوی کار لازم برای بسالابردن

یک " ذره معادل " به جرم ρV از مرکز گون T به بالاترین نقطه T است.

راهنمایی: مثال ۲، صفحه ۷۶۰، را به یاد آورید.

۴.۱۴ مطالب دیگر در باب مرکز گون: قضایای پاپوس

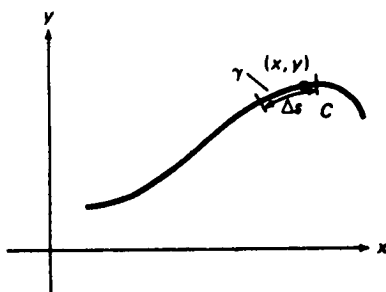
در بخش پیش طرز یافتن مرکز جرم یک جسم سه بعدی یا یک ورقه مسطح را نشان دادیم. یک مسئله مربوط یافتن مرکز جرم سیمی به چگالی متغیر است. فرض کنیم سیم به شکل منحنی مسطح C به معادلات پارامتری زیر باشد:

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a \leq t \leq b),$$

که در آن C بیش از تعدادی منتهای خودقطعی نداشته باشد. همچنین، C هموار باشد، بدین معنی که توابع $x(t)$ و $y(t)$ مشتقات پیوسته $x'(t)$ و $y'(t)$ صادق در شرط $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$ داشته باشند. در این صورت، C با طول منتهای بوده و طولش مساوی

$$L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

است (ر. ک. صفحه ۷۴۱)، و هر قوس C نیز با طول منتهای می باشد. فرض کنیم γ قوسی از C شامل نقطه (x, y) از C بوده (ر. ک. شکل ۲۵)، و Δs را طول و Δm را جرم γ می گیریم.



شکل ۲۵

در این صورت، طبق تعریف،

$$\rho(x, y) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta s}$$

تابع چگالی C در (x, y) است که با واحدهایی چون گرم برسانتیمتر سنجیده می شود. هدف آن است که به کمک تابع $\rho(x, y)$ ، که پیوسته فرض شده، جرم کل سیم C و مرکز جرم آن را تعیین کنیم.

برای این کار، فرض کنیم نقاط t_i ($i = 0, 1, \dots, n$) افزای از بازه $[a, b]$ به اندازه μ باشد. در نتیجه، $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ ، و $\mu = \max \{\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n\}$ که در آن $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ طول زیربازه i م $[t_{i-1}, t_i]$ است. در این صورت،

نقاط نظیر

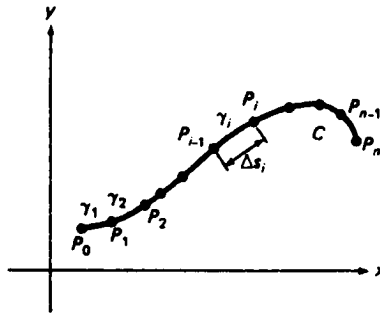
$$P_i = (x(t_i), y(t_i)) \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

سیم C را به n قوس

$$\gamma_i = \widehat{P_{i-1}P_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

تقسیم می‌کنند (ر.ک. شکل ۲۶)، که در آن γ_i طول

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$



شکل ۲۶

می‌باشد. بنابراین قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها (قضیه ۳، صفحه ۳۹۱)، نقطه‌ای مانند τ_i در $[t_{i-1}, t_i]$ وجود دارد به طوری که

$$\Delta s_i = \sqrt{[x'(\tau_i)]^2 + [y'(\tau_i)]^2} \Delta t_i.$$

فرض کنیم

$$Q_i = (x_i, y_i) = (x(\tau_i), y(\tau_i)) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

نقطه نظیر به مقدار پارامتر τ_i باشد. در این صورت، قوس γ_i را می‌توان ذره‌ای به جرم

$$\Delta m_i \approx \rho(x(\tau_i), y(\tau_i)) \Delta s_i = \rho(x(\tau_i), y(\tau_i)) \sqrt{[x'(\tau_i)]^2 + [y'(\tau_i)]^2} \Delta t_i$$

گرفت که در نقطه Q_i قرار دارد. لذا، مرکز جرم C ، با تقریبی مناسب، مرکز جرم دستگاه ذرات $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ می‌باشد. بنابراین، مرکز جرم (\bar{x}, \bar{y}) از C را موضع حدی مرکز جرم این دستگاه ذرات، وقتی $\mu \rightarrow 0$ ، تعریف می‌کنیم؛ یعنی،

$$\bar{x} = \frac{\lim_{n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n x_i \Delta m_i}{\lim_{n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta m_i} = \frac{\lim_{n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n x(\tau_i) \rho(x(\tau_i), y(\tau_i)) \sqrt{[x'(\tau_i)]^2 + [y'(\tau_i)]^2} \Delta t_i}{\lim_{n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(x(\tau_i), y(\tau_i)) \sqrt{[x'(\tau_i)]^2 + [y'(\tau_i)]^2} \Delta t_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n y_i \Delta m_i}{\lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta m_i} = \frac{\lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n y(\tau_i) \rho(x(\tau_i), y(\tau_i)) \sqrt{[x'(\tau_i)]^2 + [y'(\tau_i)]^2} \Delta t_i}{\lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(x(\tau_i), y(\tau_i)) \sqrt{[x'(\tau_i)]^2 + [y'(\tau_i)]^2} \Delta t_i}$$

هر یک از مجموعهای شامل ρ یک مجموع ریمان است که، وقتی $\mu \rightarrow 0$ ، به انتگرال معینی نزدیک می شود. در واقع،

$$\begin{aligned} & \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(x(\tau_i), y(\tau_i)) \sqrt{[x'(\tau_i)]^2 + [y'(\tau_i)]^2} \Delta t_i \\ &= \int_a^b \rho(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt, \\ & \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n x(\tau_i) \rho(x(\tau_i), y(\tau_i)) \sqrt{[x'(\tau_i)]^2 + [y'(\tau_i)]^2} \Delta t_i \\ &= \int_a^b x(t) \rho(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt, \\ & \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n y(\tau_i) \rho(x(\tau_i), y(\tau_i)) \sqrt{[x'(\tau_i)]^2 + [y'(\tau_i)]^2} \Delta t_i \\ &= \int_a^b y(t) \rho(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \end{aligned}$$

این سه انتگرال را به صورت خلاصه^۱

$$\int_C \rho(x, y) ds, \quad \int_C x \rho(x, y) ds, \quad \int_C y \rho(x, y) ds$$

نشان داده، و معمولاً "انتگرالهای خط"، یا به طور دقیقتر، انتگرالهای خط در امتداد منحنی C نسبت به طول قوس s می نامند^۱. برای درک نمادگذاری، به یاد آورید که

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

دیفرانسیل تابع طول قوس

$$s = s(t) = \int_a^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2} du$$

است، که طول قوس C با نقطه شروع ثابت $P(a) = (x(a), y(a))$ و نقطه پایان متغیر

۱. نام بهتر "انتگرالهای منحنی الخط" است. یعنی، انتگرالها در امتداد منحنیها.

نوع دیگری انتگرال خط وجود دارد، نسبت به مختصات x و y ، که در بخش ۱۰-۱۵ معرفی خواهد شد.

$P(t) = (x(t), y(t))$ را به ما می‌دهد. عبارات مربوط به مختصات \bar{x} و \bar{y} مرکز جرم سیم خمیده C با تابع چگالی $\rho = \rho(x, y)$ برحسب انتگرالهای خط به شکل فشرده زیر درمی‌آیند:

$$(1) \quad \bar{x} = \frac{\int_C x \rho ds}{\int_C \rho ds}, \quad \bar{y} = \frac{\int_C y \rho ds}{\int_C \rho ds}.$$

البته، انتگرال $\int_C \rho ds$ در هر دو مخرج جرم کل M سیم است. لذا، می‌توان فرمولهای (۱) را به‌طور فشرده‌تر زیر نوشت:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_C x \rho ds, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \int_C y \rho ds.$$

اگر سیم همگن باشد، چگالی ρ ثابت است. در این صورت، فرمولهای (۱) فوراً "به‌صورت زیر ساده می‌شوند:

$$\bar{x} = \frac{\int_C x ds}{\int_C ds}, \quad \bar{y} = \frac{\int_C y ds}{\int_C ds}.$$

اما $\int_C ds = L$ ، که در آن L طول C است؛ و لذا،

$$(2) \quad \bar{x} = \frac{1}{L} \int_C x ds, \quad \bar{y} = \frac{1}{L} \int_C y ds \quad (\text{چگالی ثابت})$$

در این حالت مرکز جرم مرکز گون نام دارد، و صرفاً "یک مفهوم هندسی است. لذا، از مرکز گون منحنی C صحبت می‌کنیم، که لازم نیست سیم جرم‌دار تصور شود.

مثال ۱. فرض کنید C منحنی زیر باشد:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi/2),$$

یعنی، قوسی از دایره $\frac{1}{2}$ یکه که در ربع اول قرار دارد. مرکز جرم یک سیم به شکل C را در صورتی بیابید که تابع چگالی آن $\rho(x, y) = x$ باشد.

حل. در اینجا داریم

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = dt,$$

و در نتیجه، بنابر (۱)،

$$\bar{x} = \frac{\int_C x^2 ds}{\int_C x ds} = \frac{\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt}{\int_0^{\pi/2} \cos t dt}, \quad \bar{y} = \frac{\int_C yx ds}{\int_C x ds} = \frac{\int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt}{\int_0^{\pi/2} \cos t dt}.$$

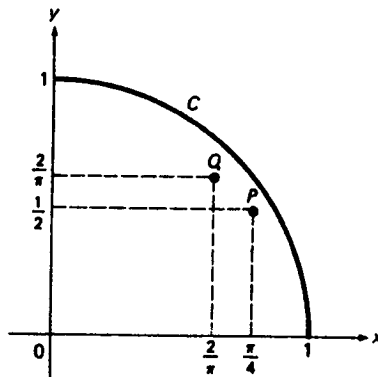
با محاسبه انتگرالها، معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos t dt &= \sin t \Big|_0^{\pi/2} = 1, \\ \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt &= \frac{1}{2} \sin^2 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}, \\ \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt = \left[\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

ولذا،

$$\bar{x} = \frac{\pi}{4}, \quad \bar{y} = \frac{1}{2}.$$

بنابراین، مرکز جرم سیم نقطه $P = (\pi/4, 1/2)$ نموده شده در شکل ۲۷ است. توجه کنید که مرکز جرم روی سیم واقع نیست (بندرت واقع است). برای $\bar{x} > \bar{y}$ دلیل فیزیکی بیاورید.



شکل ۲۷

مثال ۲. فرض کنید C همان قوس مستدیر مثال قبل باشد. مرکز گون C را پیدا کنید.

حل. قوس به طول $\pi/2$ است؛ ولذا، طبق (۲)،

$$\bar{x} = \frac{1}{L} \int_C x \, ds = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = \frac{2}{\pi} \sin t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{L} \int_C y \, ds = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt = -\frac{2}{\pi} \cos t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

پس مرکز گون قوس نقطه $Q = (2/\pi, 2/\pi)$ شکل ۲۷ می باشد. چرا انتظار $\bar{x} = \bar{y}$ می رود؟

اگر C یک منحنی فضایی به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

باشد، فرمولهای (۱) و (۲) را می توان با $\rho = \rho(x, y, z)$ و

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \, dt$$

به کار برد، ولی در اینجا (به آسانی می توان ثابت کرد) فرمول اضافی

$$\bar{z} = \frac{\int_C z \rho \, ds}{\int_C \rho \, ds} = \frac{1}{M} \int_C z \rho \, ds$$

برای مختص z مرکز جرم وجود دارد، که در صورت ثابت بودن ρ به شکل

$$\bar{z} = \frac{1}{L} \int_C z \, ds$$

درمی آید.

مثال ۳. فرض کنید C منحنی

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

باشد؛ یعنی، نیمدور یک مارپیچ مستدیر به شعاع یک و پای 2π (ر.ک. مثال ۲، صفحه ۱۱۷۵). مرکز گون C را پیدا کنید.

حل. چون

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \, dt = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} \, dt = \sqrt{2} \, dt,$$

منحنی C به طول $L = \int_0^\pi \sqrt{2} \, dt = \sqrt{2}\pi$ می باشد. لذا، مختصات مرکز گون عبارتند از

$$\bar{x} = \frac{1}{L} \int_0^\pi x \, ds = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos t \, dt = \frac{1}{\pi} \sin t \Big|_0^\pi = 0,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{L} \int_0^{\pi} y \, ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \, dt = -\frac{1}{\pi} \cos t \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi},$$

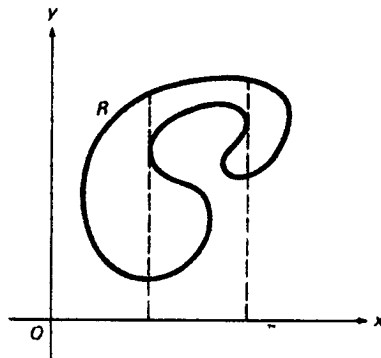
$$\bar{z} = \frac{1}{L} \int_0^{\pi} z \, ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \, dt = \frac{1}{2\pi} t^2 \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

مقادیر \bar{x} و \bar{z} را می‌توان از تقارن C ، بدون محاسبه، حدس زد (بیشتر توضیح دهید).

قضایای پایوس، بررسی مرکز گونها را ادامه داده، یک جفت قضیه مرتبط ثابت می‌کنیم که صورتهای جدید نتایج هستند که از قدیم معلوم بوده‌اند. در واقع، آنها را می‌توان در کتاب هفتم ریاضیدان بزرگ یونان، پایوس اسکندری، که حوالی 320 بعد از میلاد نوشته شده است یافت.

قضیه ۶ (قضیه پایوس برای یک جسم دوار). فرض کنیم T جسم حاصل از دوران ناحیه R مسطح به مساحت A حول محوری در صفحه آن بوده، و محور از هیچ نقطه درونی R نگذشته باشد. در این صورت، V ، یعنی حجم T ، مساوی است با حاصل ضرب A در مسافت پیموده شده توسط مرکز گون C .

برهان. بی‌آنکه به کلیت خللی وارد شود، می‌توان فرض کرد R در نیمه بالایی صفحه xy واقع بوده و محور x محور دوران آن باشد. همچنین، فرض کنیم (برای تمام نواحی آمده در مسائل عملی برقرار است) ناحیه R به‌طور قائم ساده یا آنکه بتوان آن را با رسم خطوطی موازی محور y ، مثل شکل ۲۸، به تعدادی متناهی ناحیه به‌طور قائم ساده افراز کرد. فرض کنیم $R = \{(x, y): a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$ ، در نتیجه،



شکل ۲۸

که در آن توابع f و g بر $[a, b]$ پیوسته و نامنفی اند. در این صورت، طبق فرمول (۲)، صفحه ۷۱۲، جسم T حاصل از دوران R حول محور x به حجم

$$(۳) \quad V = \pi \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\} dx$$

خواهد بود. ولی مختص y مرکزگون R عبارت است از

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{A} \iint_R y dA = \frac{1}{A} \int_a^b dx \int_{g(x)}^{f(x)} y dy \\ &= \frac{1}{A} \int_a^b \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{g(x)}^{f(x)} dx = \frac{1}{2A} \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\} dx \end{aligned}$$

(فرمول (۱۵))، صفحه ۱۳۶۱، را به یاد آورید (یا معادلا)

$$(۴) \quad \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\} dx = 2A\bar{y}.$$

حال با گذاردن (۴) در (۳) نتیجه می شود

$$(۵) \quad V = A(2\pi\bar{y}),$$

که در آن $2\pi\bar{y}$ مسافت پیموده شده توسط مرکز گون R در یک دوران حول محور x است. این قضیه را برای حالتی که R به طور ساده قائم است ثابت می کند.

اگر R به طور قائم ساده نباشد، آن را با رسم خطوطی موازی محور y به زیر ناحیه های به طور قائم ساده R_1, \dots, R_n افراز می کنیم که مرکز گونهایشان دارای مختصات y مساوی $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ باشند. فرض کنیم A_i مساحت R_i بوده، و V_i حجم جسم حاصل از دوران R_i حول محور x باشد. در این صورت، طبق فرمول (۵)، که بر هر زیر ناحیه R_i اعمال شود،

$$V = V_1 + \dots + V_n = A_1(2\pi\bar{y}_1) + \dots + A_n(2\pi\bar{y}_n).$$

ولی

$$\bar{y}_i = \frac{1}{A_i} \iint_{R_i} y dA \quad (i = 1, \dots, n),$$

و لذا، به کمک قاعده (چهار)، صفحه ۱۳۲۳،

$$\begin{aligned} V &= V_1 + \dots + V_n = 2\pi \iint_{R_1} y dA + \dots + 2\pi \iint_{R_n} y dA \\ &= 2\pi \iint_R y dA = 2\pi A \cdot \frac{1}{A} \iint_R y dA = A(2\pi\bar{y}), \end{aligned}$$

در نتیجه، فرمول (۵) برای تمام ناحیه R برقرار است.

قضیه γ (قضیه پاپوس برای سطح دوار). فرض کنیم S سطح حاصل از دوران منحنی مسطح ساده C به طول L حول محوری در صفحه اش بوده، و C از محور نگذرد. در این صورت، A ، یعنی مساحت S ، مساوی حاصل ضرب L در مسافت پیموده شده به وسیله مرکز گون C می باشد.

برهان. مجدداً، فرض قرار داشتن C در نیمه بالایی صفحه xy و گرفتن محور x به عنوان محور دوران خللی به کلیت وارد نمی سازد. فرض کنیم C به معادلات پارامتری زیر باشد:

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a \leq t \leq b),$$

که در آنها $x(t)$ و $y(t)$ بر $[a, b]$ به طور پیوسته مشتق پذیرند. در این صورت، طبق فرمول (۱) صفحه ۷۵۰،

$$A = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt,$$

که آن را می توان به طور فشرده تر

$$(۶) \quad A = 2\pi \int_C y ds$$

و برحسب انتگرال خط نسبت به طول قوس s نوشت. اما، طبق ۲، مختص y مرکز گون C مساوی است با

$$\bar{y} = \frac{1}{L} \int_C y ds,$$

یا معادلاً

$$(۷) \quad \int_C y ds = L\bar{y}.$$

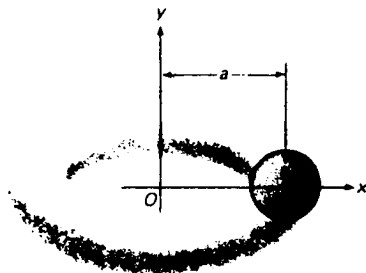
حال با گذاردن (۷) در (۶) نتیجه می شود

$$A = L(2\pi\bar{y}),$$

که در آن $2\pi\bar{y}$ فاصله پیموده شده توسط مرکز گون C است. (در اینجا C هموار فرض شده است، ولی اگر C "قطعه قطعه هموار"، به صورت تعریف شده در صفحه ۱۴۳۹، هم باشد، قضیه برقرار خواهد ماند).

مثالهای زیر موارد استعمال قضایای پاپوس را توضیح می دهند .

مثال ۴ . حجم V چنبره حاصل از دوران یک قرص مستدیر حول خطی در صفحه آن که با قرص منقطع نیست را بیابید (ر. ک. شکل ۲۹) .



شکل ۲۹

حل . فرض کنیم r شعاع قرص بوده ، و a فاصله عمودی مرکز قرص تا محور باشد . واضح است که مرکز گون قرص به خاطر تقارن مرکز آن بوده ، و مساحت قرص πr^2 است . لذا ، طبق قضیه ۶ ،

$$V = \pi r^2(2\pi a) = 2\pi^2 r^2 a.$$

ما قبلاً ، با استفاده از روش واشرها ، همین جواب را در مثال ۴ ، صفحه ۷۱۴ ، به دست آورده ایم .

مثال ۵ . مرکز گون (\bar{x}, \bar{y}) ناحیه نیمه مستدیر $x^2 + y^2 \leq r^2, y \geq 0$ به شعاع r را بیابید .

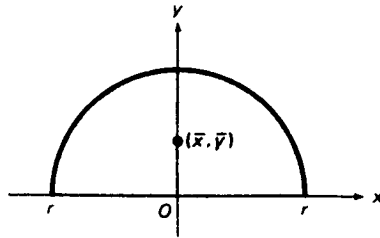
حل . بنا بر تقارن ، $\bar{x} = 0$. برای یافتن \bar{y} ، ملاحظه می کنیم که ناحیه به مساحت $\frac{1}{2}\pi r^2$ است ، و از دوران آن حول محور x کره توپری به حجم $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ تولید می شود . پس از قضیه ۶ معلوم می شود که

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{2}\pi r^2(2\pi\bar{y}),$$

که ایجاب می کند که

$$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi} \approx 0.42r.$$

در شکل ۳۰ ، جای مرکز گون (\bar{x}, \bar{y}) نموده شده است .



شکل ۳۰

مثال ۶. مساحت A ی چنبره^۶ مثال ۴ را بیابید.

حل. بنابر تقارن، مرکز گون دایره^۶ مولد سطح در مرکزش قرار دارد، و طول (محیط) دایره $2\pi r$ است. لذا، طبق قضیه^۶ ۷،

$$A = 2\pi r(2\pi a) = 4\pi^2 ra,$$

که در آن a فاصله^۶ عمودی مرکز دایره تا محور دوران می باشد. همین جواب در مثال ۲، صفحه^۶ ۷۵۳، با محاسبه^۶ مستقیم به دست آمد.

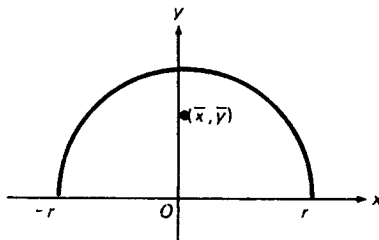
مثال ۷. مرکز گون قوس نیمه مستدیر $x^2 + y^2 = r^2, y \geq 0$ به شعاع r را بیابید.

حل. مثل مثال ۵، طبق تقارن داریم $\bar{x} = 0$ ، ولی در اینجا سروکارمان با منحنی است تا ناحیه. برای یافتن \bar{y} ، ملاحظه می کنیم که از دوران نیمدایره به طول πr حول محور x کره ای به مساحت $A = 4\pi r^2$ تولید می شود. پس از قضیه^۶ ۷ نتیجه می شود که

$$A = 4\pi r^2 = \pi r(2\pi \bar{y}),$$

ایجابگر آنکه

$$\bar{y} = \frac{2r}{\pi} \approx 0.64 r.$$



شکل ۳۱

در شکل ۳۱، جای مرکز گون نشان داده شده است. چرا مرکز گون این قوس از مرکز گون ناحیه شکل ۳۰ با قوسی که قسمتی از مرز است بالاتر است.

مسائل

۱. مرکز گون منحنی

$$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad (0 \leq t \leq \theta \leq 2\pi)$$

را، که قوس مستدیری به شعاع یک و زاویه مرکزی θ است، بیابید.

۲. جرم کل سیمی به شکل منحنی

$$y = \ln x \quad (\frac{1}{2} \leq x \leq 2)$$

را در صورتی بیابید که تابع چگالی آن $\rho(x, y) = x^2$ باشد.

۳. جرم کل سیمی به شکل منحنی

$$x = 2 \cos t, \quad y = \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi/2)$$

(یک قوس بیضوی) را در صورتی بیابید که تابع چگالی اش $\rho(x, y) = y$ باشد.

۴. مرکز گون منحنی

$$y = \cosh x \quad (0 \leq x \leq \ln 2)$$

را پیدا کنید.

جرم کل M و مرکز جرم \bar{x} توزیع جرم روی محور x نامنفی با تابع چگالی داده شده را بیابید.

$$\rho(x) = e^{-x} \quad ۰۶ \quad \rho(x) = 1/(x^2 + 1) \quad ۰۵$$

$$\rho(x) = xe^{-x} \quad ۰۸ \quad \rho(x) = e^{-x^2} \quad ۰۷$$

راهنمایی. کمیات M و \bar{x} به طور طبیعی با انتگرالهای مجازی

$$M = \int_0^x \rho(x) dx, \quad \bar{x} = \frac{1}{M} \int_0^x x\rho(x) dx$$

تعریف شده‌اند.

۹. به کمک مثال ۵، صفحه ۵۴۷، مرکز گون قوس ستاره‌گون $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ($a > 0$) در

ربع اول را پیدا کنید.

۱۰. جرم کل سیمی به شکل منحنی

$$x = 3 \cos t, \quad y = 3 \sin t, \quad z = 4t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(یک دور از مارپیچ مستدیر) را در صورتی بیابید که تابع چگالی مساوی $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ باشد.

۱۱. جرم کل سیمی به شکل منحنی

$$x = t, \quad y = \frac{1}{2}t^2, \quad z = \frac{1}{3}t^3 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

(یک مکعبی پیچ خورده) را در صورتی بیابید که تابع چگالی اش $\rho(x, y, z) = \sqrt{2}y$ باشد.

۱۲. با استفاده از انتگرالهای مجازی، مرکز گون منحنی

$$x = e^{-t} \cos t, \quad y = e^{-t} \sin t, \quad z = e^{-t} \quad (0 \leq t < \infty)$$

را پیدا کنید.

با استفاده از قضیه ۶، حجم جسم حاصل از دوران هر یک از نواحی زیر را حول محور x پیدا نمایید.

۱۳. ناحیه مسئله ۹، صفحه ۱۳۶۷.

۱۴ تا ۱۶. نواحی مسائل ۱۴ تا ۱۶، صفحه ۱۳۶۸.

۱۷. حجم جسم حاصل از دوران یک ناحیه مستطیلی به طول ۴ و عرض ۳ را حول محوری در صفحه اش که از رأس P ناحیه گذشته و بر قطر PA انتهای P عمود است پیدا نمایید.

۱۸. یک مربع حول محوری در صفحه اش که آن را فقط در یکی از رئوس قطع می کند دوران یافته است. مساحت سطح دوار حاصل به ازای چه موضعی از محور ماکزیمم است؟

۱۹. در مسئله ۱، صفحه ۷۵۷، دیدیم که مساحت سطح حاصل از دوران منحنی

$$x = t^3, \quad y = \frac{2}{3}t^2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

حول محور x مساوی است با $A = \frac{4}{3}(\sqrt{2} + 1)\pi$. با استفاده از این و قضیه ۷، \bar{y} ، یعنی عرض مرکز گون منحنی، را بیابید.

۲۰. در مسئله ۱۵، صفحه ۷۵۷، دیدیم که مساحت سطح حاصل از دوران منحنی

$$y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^{-1} \quad (1 \leq x \leq \sqrt{2})$$

حول محور x برابر است با $A = \frac{4}{3}\pi$. با استفاده از این و قضیه ۷، \bar{y} ، یعنی عرض مرکز گون منحنی، را بیابید.

۲۱. با دو بار استفاده از قضیه ۶، مرکز گون ناحیه مثلثی R محدود به محورهای مختصات و خط

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

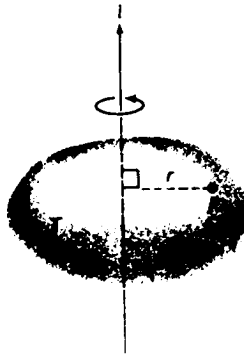
را بیابید.

۲۲. ستاره گون $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ($a > 0$) حول محوری ماربر نقاط $(a, 0)$ و $(0, a)$ دوران می کند.

با استفاده از قضایای پاپوس، حجم V ناحیه^۱ سه‌بعدی حاصل و مساحت A ی سطحش را بیابید.

۵.۱۴ گشتاورهای ماند

فرض کنیم جسم جامد T با تندی زاویه‌ای ω حول محور l ، و طبق شکل ۳۲، دوران کند.



شکل ۳۲

در این صورت، نقطه P در T با تندی انتقالی $v = r\omega$ حرکت می‌کند، که در آن r فاصله P تا l است (ر.ک. صفحه^۲ ۱۱۰۸). لذا، اگر P را ذره‌ای به جرم m بگیریم، انرژی جنبشی P مساوی است با

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

(ر.ک. صفحه^۳ ۴۲۹). به‌طورکلی، فرض کنیم P_1, P_2, \dots, P_n دستگاهی مرکب از n ذره در T به جرمهای m_1, m_2, \dots, m_n باشد. در این صورت، انرژی جنبشی کل K ی دستگاه، ناشی از دوران حول l ، مساوی است با

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2,$$

که در آن r_i فاصله P_i تا l می‌باشد. بنابراین،

$$K = \frac{1}{2} I_l \omega^2,$$

برحسب کمیت

$$(1) \quad I_l = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2,$$

گشتاور ماند دستگاه حول I نام دارد. این کمیت در بررسی مسائل دینامیک مربوطه دوران اهمیتی اساسی دارد. اگر جرم به کیلوگرم (kg) و فاصله به متر (m) باشد، واحد فیزیکی گشتاورهای ماند kg-m^2 می‌باشد. مثلاً، "گشتاور ماند زمین نسبت به محور قطبی خود تقریباً $8 \times 10^{37} \text{ kg-m}^2$ است."

حال باید بتوانید طرز تعریف گشتاور ماند تمام جسم T ، به عنوان یک ناحیه سه بعدی (نرمال) که بر آن چگالی جرم پیوسته $\rho = \rho(P) = \rho(x, y, z)$ تعریف شده است، را نسبت به I تعریف کنید. فرض کنیم T طبق معمول (با رسم صفحاتی موازی صفحات مختصات) به n زیر ناحیه T_1, T_2, \dots, T_n افراز شده باشد، μ را اندازه مش افراز گرفته، و P_i را نقطه دلخواهی در T_i می‌گیریم. در این صورت، T_i را می‌توان ذره‌ای به جرم $\Delta m \approx \rho(P_i) \Delta V_i$ گرفت که در P_i قرار دارد، و اگر μ کوچک باشد، گشتاور ماند T ، با تقریبی مناسب، همان گشتاور ماند دستگاه مرکب از n ذره T_1, T_2, \dots, T_n می‌باشد. لذا، گشتاور ماند I_I از T حول I را حد گشتاور ماند این دستگاه از ذرات نسبت به I ، وقتی $\mu \rightarrow 0$ ، تعریف می‌کنیم؛ یعنی، به کمک (۱)، قرار می‌دهیم

$$I_I = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n r^2(P_i) \Delta m_i = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n r^2(P_i) \rho(P_i) \Delta V_i,$$

که در آن $r = r(P) = r(x, y, z)$ فاصله نقطه P تا محور دوران I می‌باشد. چون مجموع سمت راست یک مجموع ریمان تابع $r^2(P)\rho(P)$ بر T است، نتیجه می‌شود که

$$I_I = \iiint_T r^2(P)\rho(P) dV,$$

یا به‌طور فشرده‌تر،

$$(2) \quad I_I = \iiint_T r^2 \rho dV.$$

در ورقه R در صفحه xy به چگالی $\rho = \rho(x, y)$ ، البته تعریف مناسب I_I عبارت است

از

$$(2') \quad I_I = \iint_R r^2 \rho dA,$$

که در آن انتگرال سه‌گانه در (۲) با انتگرال مضاعف عوض شده است. در اینجا $r = r(x, y)$ فاصله نقطه متغیر (x, y) از R تا محور I است.

با انتخابهای متفاوتی از I گشتاورهای ماند مختلفی به دست می‌آیند. در مورد جسم

T ، داریم $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ اگر l محور x باشد ، $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ اگر l محور y باشد ، و $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ اگر l محور z باشد . در نتیجه ،

$$I_x = \iiint_T (y^2 + z^2)\rho dV,$$

$$I_y = \iiint_T (x^2 + z^2)\rho dV,$$

$$I_z = \iiint_T (x^2 + y^2)\rho dV.$$

(۳)

در مورد ورقه R ، داریم $r = |y|$ اگر l محور x باشد ، $r = |x|$ اگر l محور y باشد ، و $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ اگر l محور z باشد . در نتیجه ،

$$I_x = \iint_R y^2 \rho dA,$$

$$I_y = \iint_R x^2 \rho dA,$$

$$I_z = \iint_R (x^2 + y^2)\rho dA.$$

(۴)

چون $\sqrt{x^2 + y^2}$ فاصله P تا مبدا ، و نیز فاصله P تا محور z است ، I_z را اغلب با I_0 نشان داده و آن را گشتاور ماند قطبی می نامند (این اصطلاح فقط در مورد ورقه ها به کار می رود) . توجه کنید که $I_0 = I_z = I_x + I_y$.

شعاع چرخش . طبق معمول ،

$$M = \iint_R \rho(x, y) dA$$

جرم کل ورقه R بوده ، و

$$M = \iiint_T \rho(x, y, z) dV$$

جرم کل جسم T می باشد . می توان بر حسب M نوشت

$$I_x = Mk_x^2,$$

که در آن

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}}$$

لذا، گشتاورمانند I_x از R یا T نسبت به محور x همان گشتاورمانند "ذره معادل" به جرم M است که فاصله اش تا محور x مساوی k_x می باشد. کمیت k_x شعاع چرخش R یا T نسبت به محور x نام دارد. به همین نحو، شعاعهای چرخش یک ورقه یا جسم جامد نسبت به محورهای y و z عبارتند از

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}}, \quad k_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}}$$

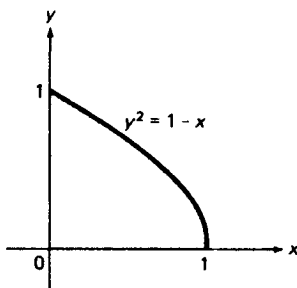
در مورد ورقه، فرمول اخیر صورت دیگر زیر را نیز دارد:

$$k_o = \sqrt{\frac{I_o}{M}}$$

که در آن $k_o = k_z$ شعاع چرخش قطبی نامیده می شود.

همچنین، می توان از گشتاور ماند یا شعاع چرخش یک صفحه یا ناحیه جامد، به جای یک ورقه مسطح یا جسمی جامد سخن گفت. منظور ما از این یعنی گشتاور ماند یا شعاع چرخش با تابع چگالی $\rho(x, y, z)$ یا $\rho(x, y)$ که متحد 1 بوده و واحد سنجش آن جرم بر واحد مساحت یا حجم می باشد.

مثال ۱. گشتاورهای ماند و شعاع چرخش یک صفحه به چگالی $\rho(x, y) = y$ به شکل ناحیه R محدود به محورهای مثبت مختصات و سهمی $y^2 = 1 - x$ (ر. ک. شکل ۳۳) را حول محورهای x و y پیدا نمایید.



شکل ۳۳

حل. بنابر دو فرمول اول (۴)،

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_R y^2 \rho dA = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x}} y^3 dy = \frac{1}{4} \int_0^1 (1-x)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \left[x - x^2 + \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y &= \iint_R x^2 \rho dA = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x}} x^2 y dy = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 (1-x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

چون جرم صفحه مساوی است با

$$M = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x}} y dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x) dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{4},$$

شعاعهای چرخش نظیر عبارتند از

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

مثال ۲. گشتاورهای ماند و شعاعهای چرخش ناحیه R به مساحت πab محصور به بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ را حول محورهای x و y بیابید. همچنین، گشتاور ماند قطبی و شعاع چرخش قطبی R را پیدا نمایید.

حل. در اینجا $\rho(x, y) \equiv 1$ ، و با استفاده از تقارن R ، داریم

$$I_x = \iint_R y^2 dA = 4 \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{a^2-x^2}/a} y^2 dy = \frac{4b^3}{3a^3} \int_0^a (a^2 - x^2)^{3/2} dx,$$

$$I_y = \iint_R x^2 dA = 4 \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{a^2-x^2}/a} x^2 dy = \frac{4b}{a} \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

با جانشانی $x = a \cos t$ ، به کمک مسئله ۱۳، صفحه ۶۱۴، به دست می‌آوریم

$$I_x = \frac{4ab^3}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^4 t dt = \frac{4ab^3}{3} \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi ab^3}{4},$$

$$I_y = 4a^3b \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^2 t dt = 4a^3b \left(\frac{\pi}{16} \right) = \frac{\pi a^3 b}{4}$$

(این انتگرال در حل مثال ۵، صفحه ۱۳۳۳، محاسبه شد) . چون جرم ناحیه برابر است با $M = \pi ab$ ، شعاعهای چرخش نظیر عبارتند از

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}} = \frac{b}{2}, \quad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}} = \frac{a}{2}.$$

برای به دست آوردن گشتاور ماند قطبی I_O ، ملاحظه می‌کنیم که

$$I_O = I_z = I_x + I_y = \frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2).$$

لذا، شعاع چرخش قطبی مساوی است با

$$k_O = \sqrt{\frac{I_O}{M}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

اگر $a = b$ ، بیضی به دایره $x^2 + y^2 = a^2$ به شعاع a تحویل یافته، و این فرمولها

به

$$I_x = I_y = \frac{\pi a^4}{4}, \quad I_O = \frac{\pi a^4}{2}$$

و

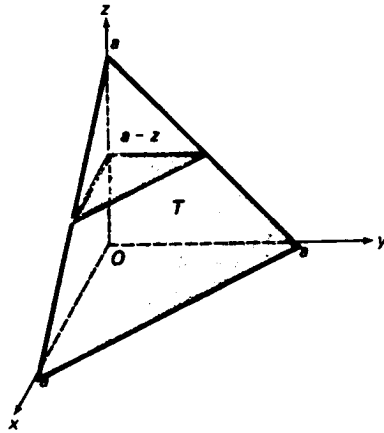
$$k_x = k_y = \frac{a}{2}, \quad k_O = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

ساده می‌شوند.

مثال ۳. گشتاورهای ماند و شعاعهای چرخش چهاروجهی T در یک‌هشت اول و محدود به صفحات مختصات و صفحه $x + y + z = a$ که $a > 0$ (ر.ک. شکل ۳۴) را حول محورهای مختصات پیدا نمایید.

حل. با فرض $\rho(x, y, z) \equiv 1$ در (۳)، معلوم می‌شود که گشتاورهای ماند عبارتند از

$$I_x = \iiint_T (y^2 + z^2) dV, \quad I_y = \iiint_T (x^2 + z^2) dV, \quad I_z = \iiint_T (x^2 + y^2) dV,$$



شکل ۳۴

که در آن، به دلیل تقارن T ،

$$\iiint_T x^2 dV = \iiint_T y^2 dV = \iiint_T z^2 dV.$$

مقطع عرضی T در z ، یعنی فصل مشترک صفحه مار بر نقطه $(0, 0, z)$ و موازی صفحه xy با T ، یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین به طول ساق $a - z$ و مساحت $A(z) = \frac{1}{2}(a - z)^2$ است. لذا، طبق روش مقاطع عرضی،

$$\begin{aligned} \iiint_T z^2 dV &= \int_0^a z^2 A(z) dz = \frac{1}{2} \int_0^a z^2 (a - z)^2 dz \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} a^2 z^3 - \frac{1}{2} a z^4 + \frac{1}{5} z^5 \right]_0^a = \frac{1}{60} a^5. \end{aligned}$$

پس نتیجه می شود که

$$I_x = I_y = I_z = \frac{1}{30} a^5.$$

جرم چهاروجهی عبارت است از

$$M = \frac{1}{2} \int_0^a (a - z)^2 dz = \frac{1}{2} \left[a^2 z - a z^2 + \frac{1}{3} z^3 \right]_0^a = \frac{1}{6} a^3,$$

و در نتیجه، شعاعهای چرخش نظیر عبارتند از

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}} = \frac{a}{\sqrt{5}}, \quad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}} = \frac{a}{\sqrt{5}}, \quad k_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}} = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

به جای شعاع چرخش می‌توان گشتاور ماند را به صورت عبارتی نوشت که در آن جرم کل ورقه یا جسم جامد عاملی از آن باشد. مثلاً، "گشتاور ماند قطبی بیضی مثال ۲ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$I_0 = \frac{1}{4} M(a^2 + b^2).$$

به همین نحو، در مثال ۳ می‌توان گشتاورهای ماند را به صورت زیر نوشت:

$$I_x = I_y = I_z = \frac{1}{5} Ma^2.$$

مسائل

۱. یک دستگاه از چهار ذره به جرمهای $m_1 = 4$ ، $m_2 = 3$ ، $m_3 = 1$ ، و $m_4 = 6$ در

نقاط $P_1 = (-3, 2, 0)$ ، $P_2 = (1, 5, -2)$ ، $P_3 = (0, 4, -1)$ ، و $P_4 = (3, 0, 1)$

تشکیل شده است. گشتاورهای ماند I_x ، I_y ، I_z و شعاعهای چرخش k_x ، k_y ، k_z دستگاه را بیابید.

۲. گشتاورهای ماند I_x و I_y ناحیه مثلثی R در ربع اول و محدود به محورهای مختصات و خط $3x + 2y = 6$ را بیابید.

۳. گشتاورهای ماند I_x و I_y ناحیه مثلثی R به رئوس $(1, 1)$ ، $(2, 1)$ ، و $(3, 3)$ را بیابید.

۴. فرض کنید R ناحیه محدود به خطوط $x = a$ و $x = b$ و محور x و منحنی

$$y = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

باشد، که در آن f بر $[a, b]$ پیوسته و نامنفی است. نشان دهید که گشتاورهای ماند R حول محورهای x و y از فرمولهای زیر به دست می‌آیند:

$$I_x = \frac{1}{3} \int_a^b [f(x)]^3 dx, \quad I_y = \int_a^b x^2 f(x) dx.$$

۵. گشتاورهای ماند I_x و I_y ورقه مستطیلی R محدود به محورهای مختصات و خطوط $x = 1$

و $y = 2$ را در صورتی بیابید که تابع چگالی آن $\rho(x, y) = x^2 + y^2$ باشد.

فرض کنید R یک ورقه مستطیلی به طول a و عرض b باشد. گشتاور ماند R را حول محوری

عمود بر R و مار بر

۶. مرکز R

۷. رأس R

پیدا کنید.

۸. گشتاور ماند ناحیه نیمه مستدیر $x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0$ را حول قطرش بیابید.
 ۹ تا ۱۲. گشتاورهای ماند I_x و I_y هر یک از نواحی مسائل ۹ تا ۱۲ صفحه ۳۶۷ را پیدا کنید.
 ۱۳. فرض کنید l خط مار بر مبداء با میل ϕ بوده، و I_l گشتاور ماند ناحیه مسطح l حول R باشد. نشان دهید که، برحسب گشتاورهای ماند I_x, I_y و کمیت $J = \iint_R xy dA$ به نام حاصل ضرب ماند،

$$I_l = I_x \cos^2 \phi - 2J \sin \phi \cos \phi + I_y \sin^2 \phi$$

۱۴. نشان دهید که مجموع گشتاورهای ماند ناحیه R حول دو محور عمود برهم در صفحه R و مار بر نقطه ثابت O به ازای هر جهت از محورهای یکسان است. راهنمایی. از مسئله قبل استفاده کنید.

۱۵. قضیه محور موازی را ثابت کنید، که می گوید هرگاه c محوری مار بر مرکز جرم یک جسم یا ورقه به جرم M بوده و l یک محور موازی c باشد، آنگاه $I_l = I_c + Md^2$ که در آن d فاصله بین محورهای موازی باشد.

۱۶. گشتاور ماند یک قرص مستدیر به شعاع a و چگالی واحد را حول یک خط مماس آن بیابید.

راهنمایی. از قضیه محور موازی استفاده کنید.

گشتاورهای ماند I_x, I_y, I_z و مکعب مستطیل T محدود به صفحات مختصات و صفحات $x = a, y = b, z = c$ (و a, b, c مثبت اند) را در صورتی بیابید که تابع چگالی به صورت زیر باشد.

$$\rho(x, y, z) = x \quad ۱۸ \quad \rho(x, y, z) \equiv 1 \quad ۱۷$$

$$\rho(x, y, z) = xyz \quad ۲۰ \quad \rho(x, y, z) = xy \quad ۱۹$$

هر جواب را به شکلی بنویسید که در آن جرم کل M به صورت عامل ظاهر شود.

۲۱. گشتاور ماند ناحیه جامد T محدود به هذلولی گون دوار $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ و صفحات $z = 0$ و $z = 1$ را حول محور z پیدا کنید.

۲۲. گشتاورهای ماند I_x, I_y, I_z جسمی با چگالی واحد و محدود به سهمی گون هذلولوی $z = xy$ و صفحات $x = 2$ و $y = 3$ در یکپشت اول را یافته، و هر یک را به صورت مضربی از M ، یعنی جرم کل T ، بیان دارید.

فرض کنید T یک مخروط مستدیر قائم توپر با چگالی واحد، ارتفاع h ، و شعاع قاعده a باشد. گشتاور ماند مخروط T را

۲۳. حول محورش

۲۴. حول یکی از اقطار قاعده اش

بیابید .

۶.۱۴ انتگرالهای مضاعف در مختصات قطبی
از بخش ۱۰.۱۴ به یاد آورید که انتگرال مضاعف

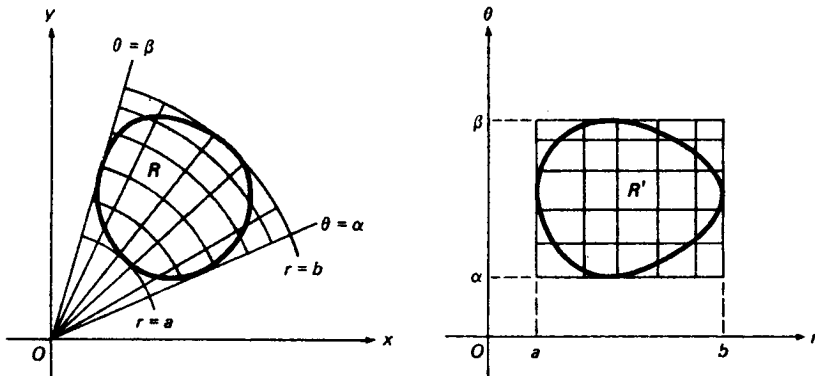
$$(1) \iint_R f(x, y) dx dy,$$

که در آن R ناحیه‌ای نرمال و f بر R پیوسته است، برحسب دستگاه مختصات قائم‌زمینه x و y تعریف شد. اما ممکن است این مختصات بهترین مختصات در محاسبه (۱) نباشند. مثلاً، با انتخاب مبدا^۱ و محور x مثبت صفحه^۲ xy به عنوان قطب و محور قطبی، مختصات قطبی r و θ را نیز معرفی می‌کنیم. در این صورت، توصیف R در مختصات قطبی آسانتر از مختصات قائم است، نکته‌ای که پس از "تبدیل" (۱) به مختصات قطبی می‌تواند مورد بهره‌برداری قرار گیرد. این کار به صورت زیر انجام می‌شود.

فرض کنیم دستگاه مختصات قائم دیگری، در صفحه^۳ دیگر، با طول r و عرض θ داشته باشیم. همانطور که شکل ۳۵ نشان می‌دهد، R نقش تبدیل مختصات

$$(2) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

ناحیه^۴ R' در صفحه^۵ $r\theta$ است، بدین معنی که هر نقطه^۶ (x, y) در R با فرمولهای (۲) به نقطه^۷ (r, θ) در R' مربوط است. فرض کنیم R' در نیمصفحه^۸ راست $r \geq 0$ و نوار افقی $0 \leq \theta \leq 2\pi$ واقع باشد. در این صورت، تناظر بین R و R' داده شده با (۲) جز احتمالاً^۹ بر مرز R' یک به یک است (نقاط $(r, 0)$ و $(r, 2\pi)$ صفحه^{۱۰} $r\theta$ هر دو به نقطه^{۱۱} $(r, 0)$ صفحه^{۱۲} xy و خط $r = 0$ کلاً^{۱۳} به مبدا^{۱۴} xy نگاشته می‌شود). فرض کنیم هر دو ناحیه^{۱۵} R و R' نرمال باشند، که R'



شکل ۳۵

مشمول مستطیل $\beta \leq \theta \leq \alpha$ ، $a \leq r \leq b$ در صفحه $r\theta$ است. در این صورت، R مشمول "قطاع طوقی" یا "مستطیل قطبی" واقع در صفحه xy است که با همان نامساویهای $\beta \leq \theta \leq \alpha$ ، $a \leq r \leq b$ تعریف می شود (ر. ک. شکل). حال قضیه زیر را داریم که انتگرالهای مضاعف روی R را به انتگرالهای مضاعف روی R' ارتباط می دهد.

قضیه ۸ (انتگرالهای مضاعف در مختصات قطبی). هرگاه $f(x, y)$ بر R پیوسته باشد، آنگاه

$$(۳) \quad \iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

برهان ناقص^۱. فرض کنیم بازه های $[a, b]$ و $[\alpha, \beta]$ توسط نقاط $r_j (j = 0, 1, \dots, J)$ و $\theta_k (k = 0, 1, \dots, K)$ با اندازه های μ_r و μ_θ افراز شده باشند. این بدان معنی است که $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{K-1} < \theta_K = \beta$ ، $a = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_{J-1} < r_J = b$ و

$$\mu_r = \max \{r_1 - r_0, r_2 - r_1, \dots, r_J - r_{J-1}\},$$

$$\mu_\theta = \max \{\theta_1 - \theta_0, \theta_2 - \theta_1, \dots, \theta_K - \theta_{K-1}\}.$$

در این صورت، خطوط

$$r = r_j \quad (j = 0, 1, \dots, J)$$

و

$$\theta = \theta_k \quad (k = 0, 1, \dots, K),$$

که موازی محورهای مختصات صفحه $r\theta$ اند، R' را به n زیرناحیه بسته R'_1, R'_2, \dots, R'_n که اغلب مستطیلی بوده و $n \leq JK$ تقسیم می کنند (معمولا " $n < JK$ "). دوايروشعاعهای واقع در صفحه xy و با همان معادلات $r = r_j$ و $\theta = \theta_k$ ، R را به n زیر ناحیه بسته R_1, R_2, \dots, R_n تقسیم می کنند که اغلب قطاعهایی طوقی بوده و R_i نقش R'_i تحت تبدیل (۲) است که مختصات قطبی را به مختصات قائم می برد. فرض کنیم

$$\mu = \max \{\mu_r, \mu_\theta\},$$

۱. چند نکته ظریف را، که در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته ظاهر می شوند، کاملاً توضیح نداده ایم. مثلاً، "قضیه در صورت یک به یک نبودن تبدیل (۲) بر مرز R ، که اغلب چنین است، نیز برقرار می باشد.

و ΔA_i و $\Delta A'_i$ مساحت R_i و R'_i باشند (وجود و ناصفر بودن ΔA_i و $\Delta A'_i$ فرض می‌باشد) . همچنین ، فرض کنیم $P'_i = (r'_i, \theta'_i)$ نقطه دلخواهی از R_i باشد (هیچ رابطه‌ای بین r'_i, θ'_i و نقاط تقسیم r_j و θ_k وجود ندارد) ، و فرض کنیم $P_i = (p_i, q_i)$ نقش P'_i تحت تبدیل (۲) باشد . در این صورت ،

$$(۴) \quad \iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(p_i, q_i) \Delta A_i$$

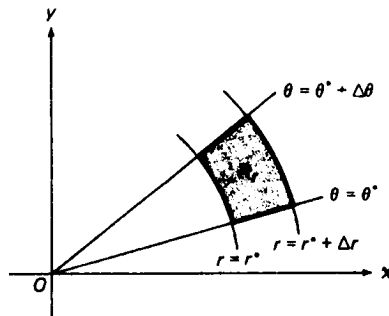
$$= \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(r'_i \cos \theta'_i, r'_i \sin \theta'_i) \frac{\Delta A_i}{\Delta A'_i} \Delta A'_i.$$

حال فرض کنیم ناحیه R'_i مستطیلی

$$r^* \leq r \leq r^* + \Delta r, \quad \theta^* \leq \theta \leq \theta^* + \Delta \theta$$

به مساحت $\Delta A'_i = \Delta r \Delta \theta$ باشد . در این صورت ، R_i قطاع طوقی شکل ۳۶ به مساحت

$$\Delta A_i = \frac{1}{2} [(r^* + \Delta r)^2 - r^{*2}] \Delta \theta = \frac{1}{2} [2r^* \Delta r + (\Delta r)^2] \Delta \theta = (r^* + \frac{1}{2} \Delta r) \Delta r \Delta \theta$$



یک قطاع طوقی یا مستطیل قطبی

شکل ۳۶

است ، زیرا ΔA_i تفاضل بین مساحت دو قطاع مستدیر با زاویه مرکزی $\Delta \theta$ و شعاعهای متفاوت r^* و $r^* + \Delta r$ است . لذا ،

$$(۵) \quad \Delta A_i = r_i^* \Delta A'_i,$$

که در آن $r_i^* = r^* + \frac{1}{2} \Delta r$ متوسط شعاعهای r^* و $r^* + \Delta r$ می‌باشد (زیرنویس r_i^* نشان می‌دهد که در ارتباط با ناحیه R_i است) . واضح است که نقاطی که در R_i به طول r_i^* وجود دارند ، و چون $P'_i = (r'_i, \theta'_i)$ نقطه دلخواهی از R'_i است ، می‌توان فرض کرد $r'_i = r_i^*$. در این

صورت (۵) شکل $\Delta A_i = r'_i \Delta A'_i$ یا معادلا

$$(۶) \quad \frac{\Delta A_i}{\Delta A'_i} = r'_i$$

را به خود می‌گیرد. اگر تمام نواحی R'_i مستطیلی باشند، نواحی نظیر R_i قطاعهایی طوقی‌اند، و می‌توان با گذاردن (۶) در (۴) به دست آورد

$$(۷) \quad \iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(r'_i \cos \theta'_i, r'_i \sin \theta'_i) r'_i \Delta A'_i.$$

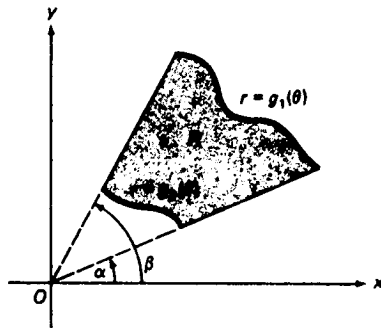
اما مجموع سمت راست یک مجموع ریمان برای تابع پیوسته $f(r \cos \theta, r \sin \theta) r$ بر ناحیه R' از صفحه $r\theta$ است، که در آن r و θ مختصات قائم می‌باشند. لذا، طبق قضیه ۱، صفحه ۱۳۲۳، وقتی $\mu \rightarrow 0$ ، این مجموع به انتگرال مضاعف $\iint_{R'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dA$ نزدیک می‌شود، که به صورت $\iint_{R'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$ نیز نوشته شده و فرمول (۳) ثابت می‌گردد. این امر که بعضی از نواحی R'_i در حالت کلی غیرمستطیلی‌اند اهمیتی ندارد، زیرا می‌توان نشان داد که اگر جملات نظیر به نواحی غیرمستطیلی را حذف کنیم، مجموع (۷) به همان حد نزدیک خواهد شد.

چگونه فرمول (۳) را به یاد آوریم. اصل مطلب در برهان قضیه ۸ این است که ناحیه R_i شکل ۳۶، در صورت کوچک بودن هر دوی Δr و $\Delta \theta$ ، تقریباً "مستطیلی" بوده و اضلاع مستقیمش به طول Δr و اضلاع خمیده‌اش به طول تقریبی $r \Delta \theta$ است، که در آن r مختص شعاعی یک نقطه در R_i است. لذا، مساحت R_i تقریباً "مساوی" است با $r \Delta r \Delta \theta$. این توضیح خامی است از اینکه چرا وقتی $\mu \rightarrow 0$ ، $r dr d\theta$ در طرف راست فرمول (۳) ظاهر می‌شود. این راه خوبی برای به یاد آوردن فرمول نیز هست.

برای محاسبه انتگرال مضاعف

$$\iint_{R'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta,$$

طبعاً "به انتگرالهای مکرر به طور معمول توسل می‌جوییم. مثلاً"، هرگاه R ناحیه "به‌طور شعاعی ساده" شکل ۳۷ باشد که به دو شعاع $\theta = \alpha$ ، $\theta = \beta$ و نمودارهای دو تابع $r = g_1(\theta)$ ، $r = g_2(\theta)$ محدود شده باشد، که در آنها $g_1(\theta)$ و $g_2(\theta)$ بر $[\alpha, \beta]$ پیوسته بوده و $g_2(\theta) \geq g_1(\theta) \geq 0$ ، آنگاه R' یک ناحیه به‌طور قائم ساده است و

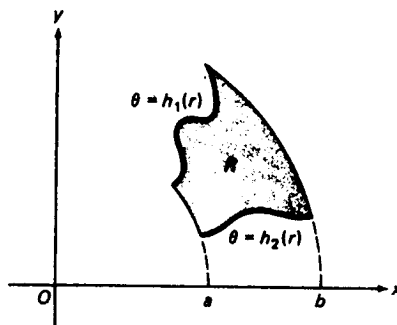


یک ناحیه به طور شعاعی ساده

شکل ۳۷

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dx dy &= \iint_{R'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr. \end{aligned}$$

به همین نحو، هرگاه R ناحیه " به طور زاویه‌ای ساده " شکل ۳۸ باشد که به دو دایره به $r = a, r = b$ و نمودارهای دو تابع $\theta = h_1(r), \theta = h_2(r)$ محدود است، که در آنها $h_1(r)$



یک ناحیه به طور زاویه‌ای ساده

شکل ۳۸

و $h_2(r)$ بر $[a, b]$ پیوسته بوده و $h_2(r) \geq h_1(r) \geq 0$ ، آنگاه R' یک ناحیه به طور افقی ساده است و

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dx dy &= \iint_{R'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_a^b dr \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta. \end{aligned}$$

با انتخاب $f \equiv 1$ در فرمول (۳)، معلوم می‌شود که مساحت A ی ناحیه به طور شعاعی ساده در شکل ۳۷ مساوی است با

$$\begin{aligned} A &= \iint_{R'} r dr d\theta = \int_a^b d\theta \int_{\theta_1(\theta)}^{\theta_2(\theta)} r dr = \int_a^b \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{\theta_1(\theta)}^{\theta_2(\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \{ [\theta_2(\theta)]^2 - [\theta_1(\theta)]^2 \} d\theta. \end{aligned}$$

این با فرمول مربوط به A که در بخش ۰.۱.۱ به دست آمد سازگاری کامل دارد (ر.ک. فرمول (۳)). صفحه ۱۰۲۵، که در آن f و θ به جای θ_2 و θ_1 به کار رفته‌اند. به عنوان تمرین، نشان دهید که مساحت ناحیه به طور زاویه‌ای ساده در شکل ۳۸ مساوی است با

$$A = \int_a^b [h_2(r) - h_1(r)] r dr.$$

مثال ۱. با استفاده از مختصات قطبی، انتگرال

$$I = \iint_R \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

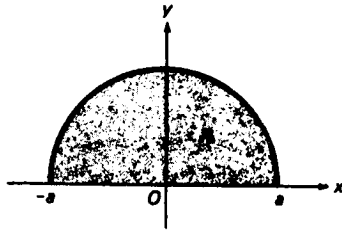
را در صورتی حساب کنید که R ناحیه نیمه مستدیر $x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0$ به شعاع a باشد (ر.ک. شکل ۳۹).

حل. بنا بر قضیه ۸،

$$I = \iint_{R'} \sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} r dr d\theta = \iint_{R'} r^2 dr d\theta,$$

که در آن R' مستطیل $0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \pi$ در صفحه $r\theta$ است. بنابراین،

$$I = \int_0^\pi \int_0^a r^2 dr d\theta = \left(\int_0^\pi d\theta \right) \left(\int_0^a r^2 dr \right) = \frac{\pi a^3}{3}.$$

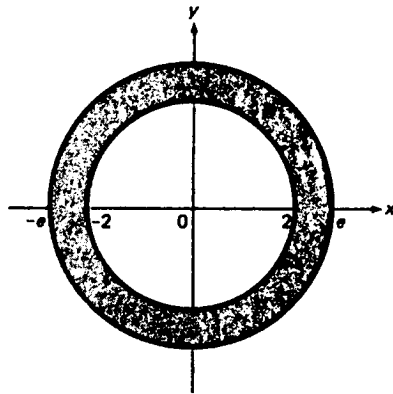


شکل ۳۹

مثال ۲. انتگرال

$$I = \iint_R \ln(x^2 + y^2) dx dy$$

را در صورتی حساب کنید که R ناحیه طوقی محدود به دایره $x^2 + y^2 = 4$ و $x^2 + y^2 = e^2$ باشد (ر.ک. شکل ۴۰).



شکل ۴۰

حل. بنابر قضیه ۸،

$$I = \iint_{R'} \ln(r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta = \iint_{R'} (\ln r^2) r dr d\theta,$$

که در آن R' مستطیل $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ، $2 \leq r \leq e$ در صفحه $r\theta$ است. بنابراین، با انتگرالی جزء به جزء داریم

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} \int_2^e (\ln r^2) r dr d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(2 \int_2^e \ln r d\left(\frac{1}{2}r^2\right) \right) \\
 &= 4\pi \left[\frac{1}{2}r^2 \ln r - \frac{1}{4}r^2 \right]_2^e = \pi(e^2 + 4 - 8 \ln 2),
 \end{aligned}$$

مثال ۳. انتگرال مجازی

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

را، که همگرایی اش در مثال ۹، صفحه ۶۸۳، نشان داده شد، محاسبه نمایید.

حل. ترفند زیر، که مستلزم انتگرال مضاعف در مختصات قطبی است، به ما اجازه محاسبه این انتگرال ظاهراً خودسر را می دهد. ابتدا می بینیم که، طبق تعریف، $I = \lim_{a \rightarrow \infty} I_a$ که در آن $I_a = \int_0^a e^{-x^2} dx$ چون هر حرف می تواند متغیر ظاهری انتگرال گیری باشد، خواهیم داشت

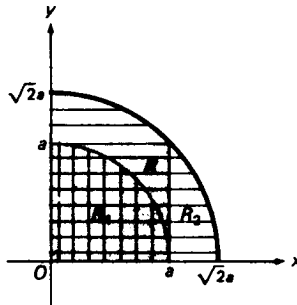
$$\begin{aligned}
 I_a^2 &= \left(\int_0^a e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^a e^{-x^2} dx \right) \\
 &= \left(\int_0^a e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^a e^{-y^2} dy \right) = \iint_R e^{-(x^2+y^2)} dx dy,
 \end{aligned}$$

که در آن R ناحیه مربعی واقع در ربع اول است که با نامساویهای $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a$ تعریف می شود. اما انتگرالده $e^{-(x^2+y^2)}$ مثبت بوده و ناحیه R شامل یکچهارم قرص R_1 است که با نامساویهای $0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \pi/2$ در مختصات قطبی تعریف شده است، و این خود مشمول یکچهارم قرص R_2 تعریف شده با نامساویهای $0 \leq r \leq \sqrt{2}a, 0 \leq \theta \leq \pi/2$ می باشد (ر. ک. شکل ۴۱). بنابراین،

$$\iint_{R_1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_R e^{-(x^2+y^2)} dx dy = I_a^2 \leq \iint_{R_2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy,$$

که در آن نامساویها اکید می باشند. با تبدیل به مختصات قطبی که در آن $x^2 + y^2 + r^2$ در می یابیم که

$$\iint_{R_1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^a = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-a^2})$$



شکل ۴۱

(در اینجا مستقیماً به انتگرال مکرر می‌رویم) ، و به همین نحو ،

$$\iint_{R_2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2a^2}),$$

در نتیجه ،

$$\frac{\pi}{4} (1 - e^{-a^2}) \leq I_a^2 \leq \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2a^2}).$$

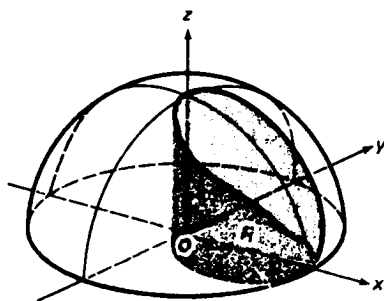
لذا ، I_a^2 بین دو عبارت قرار دارد که با رفتن $a \rightarrow \infty$ به حد مشترک $\pi/4$ نزدیک می‌شوند . چون وقتی $a \rightarrow \infty$ ، $I_a^2 \rightarrow I^2$ ، از قضیه ۱۰ ، صفحه ۱۳۷ (قضیه ساندویچ) معلوم می‌شود که $I^2 = \pi/4$. لذا ، بالاخره ،

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

از مثالهای فوق معلوم می‌شود که اگر انتگرالده یک انتگرال مضاعف شامل عبارت $x^2 + y^2$ یا توانهای آن باشد ، تبدیل به مختصات قطبی معمولاً " سودمند است . ذیلاً " مثال دیگری از این نوع را می‌آوریم .

مثال ۴ . حجم V ناحیه جامد T جدا شده از کره جامد $a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2$ به وسیله استوانه مستدیر $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$) را بیابید .

حل . استوانه $x^2 + y^2 = ax$ صفحه xy را در دایره $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}a^2$ به شعاع $\frac{1}{2}a$ و مرکز $(\frac{1}{2}a, 0)$ قطع می‌کند . همانند شکل ۴۲ ، فرض کنیم R ناحیه نیمه‌مستدیر واقع در ربع



شکل ۴۲

اول صفحه xy باشد که به این دایره و محور x مثبت محدود شده است. در این صورت، بنا بر تقارن، V چهار برابر حجم بین ناحیه به طور شعاعی ساده R و نمودار $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ (سطح بالایی کره) است؛ یعنی،

$$V = 4 \iint_R \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy.$$

قسمت نیمه‌مستدیر مرز R به معادله قطبی $r = a \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) است. لذا، با تبدیل به مختصات قطبی، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \sqrt{a^2 - r^2} \, r \, dr = 4 \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{3} (a^2 - r^2)^{3/2} \right]_0^{a \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^3 \theta) \, d\theta = \frac{4}{3} a^3 \left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta \, d\theta \right) \\ &= \frac{4}{3} a^3 \left(\frac{\pi}{2} - \left[\frac{1}{3} \cos^3 \theta - \cos \theta \right]_0^{\pi/2} \right) = \frac{4}{3} a^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right), \end{aligned}$$

که در آن بار دیگر مستقیماً "به انتگرال مکرر رفته، مرحله"

$$\iint_R \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy = \iint_{R'} \sqrt{a^2 - r^2} \, r \, dr \, d\theta$$

مستلزم ناحیه به طور قائم ساده $R' = \{(r, \theta): 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq a \cos \theta\}$ را حذف می‌کنیم.

حجم V را می‌توان با محاسبه انتگرال مستقیم $\iint_R \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$ در مختصات

قائم به دست آورد، ولی محاسبات خیلی مفصل است. این سادگی معادله قطبی $r = a \cos \theta$

انتگرالگیری چندگانه (۱۴۰۱)

برای قسمت نیمه‌مستدیر مرز R ، در مقایسه با معادلهٔ دکارتی $y = \sqrt{ax - x^2}$ ، است که محاسبهٔ V را در مختصات قطبی آسان می‌سازد.

مسائل

انتگرال مضاعف داده شده را با تبدیل مختصات قائم به قطبی حساب کنید.

۱. $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ ، که در آن R قرص $x^2 + y^2 \leq 9$ است ✓

۲. $\iint_R (x^2 + y^2) dx dy$ ، که در آن R قرص $x^2 + y^2 \leq 4x$ است ✓

۳. $\iint_R \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 1}$ ، که در آن R ناحیهٔ نیمه‌مستدیر $x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$ است ✓

۴. $\iint_R e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ ، که در آن R قرص $x^2 + y^2 \leq \ln 2$ است ✓

۵. $\iint_R \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ، که در آن R ناحیهٔ طوقی $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ است ✓

۶. $\iint_R \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ ، که در آن R ناحیهٔ طوقی $\pi^2/16 \leq x^2 + y^2 \leq \pi^2/9$ است ✓

۷. $\iint_R \cos \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ ، که در آن R ناحیهٔ طوقی $\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$ است ✓

۸. $\iint_R (1 - 3x + 2y) dx dy$ ، که در آن R ناحیهٔ نیمه‌مستدیر $x^2 + y^2 \leq 1, y \leq 0$ است ✓

۹. $\iint_R \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy$ ، که در آن R قرص $x^2 + y^2 \leq e^2 - 1$ است ✓

۱۰. $\iint_R \arctan(y/x) dx dy$ ، که در آن R قطاع طوقی $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x/\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}x$ است ✓

است.

انتگرال مکرر داده شده را از مختصات قائم به مختصات قطبی تبدیل کنید. (فرض کنید $f(x, y)$ پیوسته باشد.)

۱۲. $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{3x}} f(x^2 + y^2) dy$

۱۱. $\int_0^1 dy \int_{-y}^y f(x, y) dx$

$$\int_1^4 dy \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} f(x, y) dx \quad . ۱۴ \quad \int_0^1 dx \int_0^1 f(\sqrt{x^2+y^2}) dy \quad . ۱۳$$

با استفاده از انتگرال مضاعف در مختصات قطبی، مساحت زیر را بیابید.

۱۵ ✓ داخل دلگون $r = a(1 - \cos \theta)$ و خارج دایره $r = a$

۱۶ ✓ بین دلگون $r = a(1 + \cos \theta)$ و دایره $r = a \cos \theta$

۱۷ ✓ محدود به دایره $r = \frac{1}{2}$ و منحنیهای $\theta = \sin r$ و $\theta = \cos r$

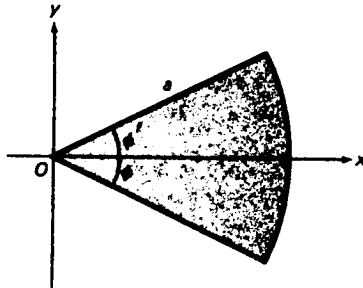
۱۸ ✓ محدود به دایره $x^2 + y^2 = x$ و $x^2 + y^2 = 2x$ ، محور x ، و خط $y = x$

۱۹ ✓ محدود به دایره $r = 2 \sin \theta$ و شعاع $\theta = \phi$ ، داخل گوه $0 \leq \theta \leq \phi \leq 2\pi$

۲۰ ✓ بین مارپیچهای ارشمیدسی $r = \theta$ و $r = 2\theta$ به ازای $0 \leq \theta \leq 4\pi$

۲۱ ✓ یک قطاع مستدیر به شعاع a و زاویه مرکزی 2ϕ به وسیله محور x نصف شده است (ر).

ک. شکل ۴۳). مرکز گون (\bar{x}, \bar{y}) آن را بیابید.



شکل ۴۳

۲۲ ✓ چگالی نقطه متغیر p یک واشر به شعاع داخلی 1cm و شعاع خارجی 3cm با فاصله p تا مرکز واشر نسبت عکس دارد. جرم کل واشر را در صورتی بیابید که چگالی در لبه خارجی آن 2 g/cm^2 باشد.

۲۳ ✓ مرکز گون (\bar{x}, \bar{y}) ناحیه محصور به دلگون $r = a(1 + \cos \theta)$ را بیابید.

۲۴ ✓ مرکز گون (\bar{x}, \bar{y}) ناحیه محصور به پررز $r = \sin 2\theta$ در ربع اول را بیابید (ر. ک. شکل ۶۴، صفحه ۱۰۰۳).

۲۵ ✓ گشتاور ماند قطبی ناحیه محصور به لمنیسکات $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ را بیابید (ر. ک. شکل ۸۲، صفحه ۱۰۲۷).

۲۶ ✓ گشتاورهای ماند ناحیه R محصور به دلگون $r = a(1 + \cos \theta)$ را حول محورهای x و y بیابید. همچنین، گشتاور ماند قطبی R را پیدا نمایید.

انتگرالگیری چندگانه ۱۴۰۳

با استفاده از انتگرال مضاعف در مختصات قطبی، حجم V ناحیه جامد داده شده T را بیابید.

۲۷. T فصل مشترک یک کره R جامد به شعاع R با استوانه $z = a$ مستدیری به شعاع $a < R$ بوده و محور استوانه از مرکز کره گذشته است.

۲۸. T به سهمی $z = a - x^2 - y^2$ و صفحه $z = a > 0$ محدود است.

۲۹. T به کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و سهمی $z = 4(1 - x^2 - y^2)$ محدود است.

۳۰. T به صفحه xy ، استوانه $x^2 + y^2 = x$ ، و مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ محدود است.

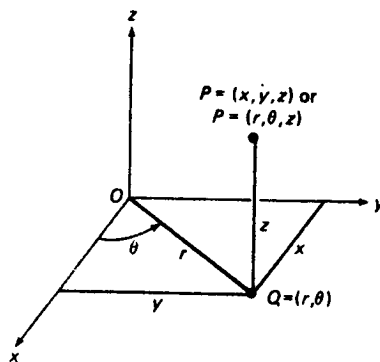
۳۱. T به سهمی گونهای $x^2 + y^2 - z = 0$ و $x^2 + y^2 + 2z = 1$ محدود است.

۳۲. T به مخروط $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ و کره $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ محدود بوده و خارج مخروط

(دو پارچه) قرار دارد.

۷.۱۴ انتگرالهای سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای

حال دستگاه مختصاتی در فضا معرفی می‌کنیم که تعمیم طبیعی دستگاه مختصات قطبی در صفحه باشد. فرض کنیم نقطه P در فضا به مختصات قائم x ، y ، z باشد. در این صورت P نیز دارای مختصات استوانه‌ای r ، θ ، z است که با نگهداشتن z و تعویض x و y با مختصات قطبی r و θ نقطه Q که تصویر P روی صفحه xy است به دست می‌آیند (ر.ک. شکل ۴۴)، اگر نقطه‌ای علاوه بر مختصات قائم x ، y ، z دارای مختصات استوانه‌ای r



شکل ۴۴

θ ، z و r باشد، علاوه بر $P = (x, y, z)$ می‌نویسیم $P = (r, \theta, z)$. مثل بخش قبلی، شرایط $0 \leq \theta \leq 2\pi$ و $r \geq 0$ را اعمال می‌کنیم، ولی z آزاد است هر مقدار در بازه $(-\infty, \infty)$

را بگیرد. از شکل واضح است که نقطه به مختصات استوانه‌ای r ، θ ، و z به مختصات قائم

$$(۱) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

بوده، و این فرمولها خود ایجاب می‌کنند که

$$(۲) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0), \quad z = z.$$

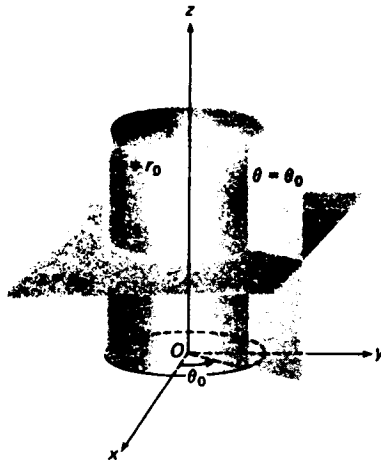
مثال ۱. بنا بر (۱) نقطه به مختصات استوانه‌ای $r = \sqrt{2}$ ، $\theta = \pi/4$ ، $z = -1$ به مختصات قائم زیر است:

$$x = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} = 1, \quad y = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} = 1, \quad z = -1,$$

ولی، طبق (۲)، نقطه به مختصات قائم $x = \sqrt{3}$ ، $y = 1$ ، $z = 2$ به مختصات استوانه‌ای زیر می‌باشد:

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{4} = 2, \quad \theta = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}, \quad z = 2.$$

در مختصات استوانه‌ای، نمودار معادله $r = r_0 > 0$ یک استوانه مستدیر به شعاع r_0 بوده و محور z محور تقارن آن است، و نمودار $r = 0$ چیزی جز خود محور z نمی‌باشد. به همین نحو، نمودار $\theta = \theta_0$ نیمصفحه‌ای است که محور z لبه آن بوده و با صفحه xz زاویه θ_0 می‌سازد، و نمودار $z = z_0$ صفحه موازی صفحه xy است که از نقطه $(0, 0, z_0)$ در مختصات دکارتی می‌گذرد. توجه کنید که سه سطح $r = r_0$ ، $\theta = \theta_0$ ، و $z = z_0$ به ازای هر $r_0 \neq 0$ ، θ_0 ، و z_0 دو به دو برهم عمودند، و این امر در شکل ۴۵ مجسم شده است.

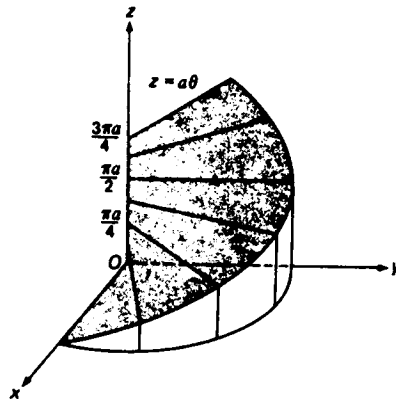


مثال ۲. نمودار معادله

$$(۳) \quad z = a\theta \quad (a > 0)$$

را در مختصات استوانه‌ای رسم کنید.

حل. با افزایش θ ، z زیاد می‌شود، ولی مقدار r مشخص نشده است. لذا، r آزاد است. تمام مقادیر نامنفی را به ازای هر جفت θ و z بگیرد. از اینرو، نمودار (۳) سطح بی‌کرانی است، به نام مارپیچ‌گون، که بخشی از آن در شکل ۴۶ نموده شده است. سطح به شکل



شکل ۴۶

سربالایی مارپیچ است، و توسط شعاعی که یک سرش به محور z وصل شده تولید می‌شود. در واقع، وقتی انتهای شعاع به بالای محور z حرکت کند، خود شعاع حول محور z چرخیده مارپیچ‌گون را جارو خواهد کرد.

اغلب برای محاسبه انتگرال سه‌گانه

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz$$

روی یک ناحیه سه‌بعدی قائم T بهتر است انتگرال را به مختصات استوانه‌ای تبدیل کنیم. این در حالتی که ناحیه T تقارن استوانه‌ای دارد، یعنی تقارن حول محوری که می‌توان آن را محور z گرفت، مناسب است. فرض کنیم، علاوه بر فضای xyz معمولی که در آن هر نقطه مختصات قائم x ، y ، و z و مختصات استوانه‌ای r ، θ ، و z دارد، "فضای $r\theta z$ "

دیگری تعریف کنیم که در آن مختصات r ، θ ، و z مختصات قائم می‌باشند. فرض کنیم T'' ناحیه‌ای در فضای $r\theta z$ باشد که T نقش آن تحت تبدیل مختصات (۱) است. در این صورت، مشابه قضیه ۸، صفحه ۱۳۹۲، را داریم که اساساً به همان ترتیب ثابت می‌شود.

قضیه ۹ (انتگرالهای سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای). هرگاه $f(x, y, z)$ بر T پیوسته باشد، آنگاه

$$(۴) \quad \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{T'} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

برهان ناقص. فرض کنیم T' در جعبه $a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, A \leq z \leq B$ در فضای $r\theta z$ باشد. همچنین، نقاط $(j = 0, 1, \dots, J)$ و r_j و $\theta_k (k = 0, 1, \dots, K)$ افزایشی از بازه‌های $[a, b]$ و $[\alpha, \beta]$ با اندازه‌های μ_r و μ_θ بوده، و $z_l (l = 0, 1, \dots, L)$ افزایشی از $[A, B]$ با اندازه μ_z باشد. در این صورت، صفحات $r = r_j, \theta = \theta_k, z = z_l$ که موازی صفحات مختصات فضای $r\theta z$ اند، T' را به n زیر ناحیه بسته T'_1, T'_2, \dots, T'_n تقسیم می‌کنند که اغلب جعبه بوده و $n \leq JKL$ (معمولاً $n < JKL$). استوانه‌ها، نیم‌صفحه‌ها، و صفحات در فضای xyz با همین معادلات $r = r_j, \theta = \theta_k, z = z_l$ را به n زیر ناحیه بسته T_1, T_2, \dots, T_n تقسیم می‌کنند که اغلب "گوه‌های استوانه‌ای" از نوعی هستند که عنقریب توصیف می‌شوند و T_i نقش T'_i تحت تبدیل مختصات (۱) است که مختصات استوانه‌ای را به مختصات قائم می‌برد. فرض کنیم

$$\mu = \max \{ \mu_r, \mu_\theta, \mu_z \},$$

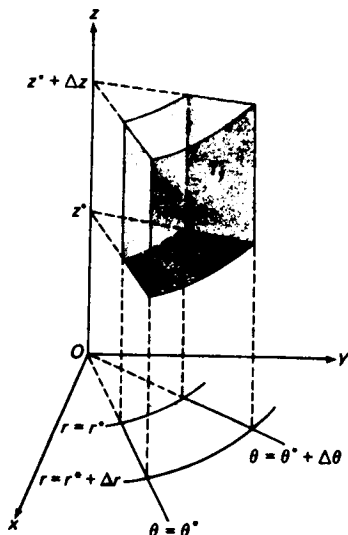
و $\Delta V'_i$ و ΔV_i حجم‌های T'_i و T_i باشند. همچنین، $P_i = (r'_i, \theta'_i, z'_i)$ نقطه دلخواهی از T'_i بوده، و $P_i = (p_i, q_i, s_i)$ نقش P'_i تحت تبدیل (۱) باشد. در این صورت،

$$(۵) \quad \begin{aligned} \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(p_i, q_i, s_i) \Delta V_i \\ &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(r'_i \cos \theta'_i, r'_i \sin \theta'_i, z'_i) \frac{\Delta V_i}{\Delta V'_i} \Delta V'_i. \end{aligned}$$

حال فرض کنیم T'_i جعبه یا مکعب مستطیل

$$r^* \leq r \leq r^* + \Delta r, \quad \theta^* \leq \theta \leq \theta^* + \Delta \theta, \quad z^* \leq z \leq z^* + \Delta z$$

به حجم $\Delta V'_i = \Delta r \Delta \theta \Delta z$ باشد. در این صورت، T_i "گوه استوانه‌ای" شکل ۴۷ است. در واقع، T_i یک استوانه قائم به ارتفاع Δz و قطاع طوقی به مساحت $r^* \Delta r \Delta \theta$ به عنوان



یک گوهه استوانه‌ای

شکل ۴۷

قاعده است، که همانند برهان قضیه ۸ $r_i^* = r_i + \frac{1}{2} \Delta r$. لذا، حجم T_i مساوی است با

$$(۶) \quad \Delta V_i = r_i^* \Delta r \Delta \theta \Delta z = r_i^* \Delta V_i'$$

(مثال ۱، صفحه ۶۹۹، را به یاد آورید). واضح است که نقاطی در T_i با r_i^* به عنوان مختص r وجود دارند، و چون $P_i = (r_i, \theta_i, z_i)$ نقطه دلخواهی از T_i است، می‌توان فرض کرد $r_i = r_i^*$. در این صورت، (۶) به شکل $\Delta V_i = r_i \Delta V_i'$ ، یا معادلاً

$$(۷) \quad \frac{\Delta V_i}{\Delta V_i'} = r_i$$

درمی‌آید. اگر تمام نواحی T_i' جعبه باشند، در نتیجه نواحی نظیر T_i گوهه‌هایی استوانه‌ای‌اند، می‌توان (۷) را در (۵) گذارده به دست آورد

$$\begin{aligned} \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(r_i \cos \theta_i, r_i \sin \theta_i, z_i) r_i \Delta V_i' \\ &= \iiint_{T'} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz, \end{aligned}$$

و فرمول (۴) ثابت می‌شود. به‌طور کلی، بعضی از نواحی T_i غیرمستطیلی‌اند، ولی می‌توان

نشان داد که این اثری بر اعتبار (۴) ندارد.

چگونه فرمول (۴) را به یاد بیاوریم. با نگاهی دیگر به شکل ۴۷ معلوم می شود که اگر Δr و $\Delta \theta$ هر دو کوچک باشند، ناحیه T_i تقریباً "مکعب مستطیل بوده و چهار ضلع مستقیمش به طول Δr و چهار تا به طول Δz ، و چهار ضلع خمیده اش به طول تقریبی $r \Delta \theta$ اند، که در آن r مختص شعاعی نقطه دلخواهی در T_i است. لذا، حجم T_i تقریباً " مساوی $r \Delta r \Delta \theta \Delta z$ می باشد. این امر ظاهر شدن $r dr d\theta dz$ در سمت راست فرمول (۴) پس از گرفتن حد وقتی $\mu \rightarrow 0$ را توضیح داده، و نیز راهی برای یاد آوردن فرمول را به ما نشان می دهد.

برای محاسبه انتگرال سه گانه

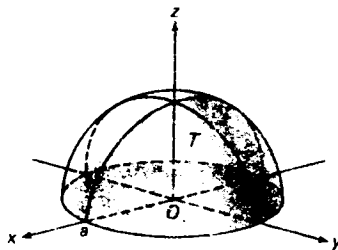
$$\iiint_{T'} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$$

به انتگرالهای مکرر به شیوه ای آشنا متوسل می شویم؛ این امر در مثالهای زیر شرح داده شده است.

مثال ۳. با استفاده از مختصات استوانه ای، مرکز گون $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ نیمکره توپر T به شعاع a را بیابید.

حل. فرض کنیم T از بالا به کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و از پایین به صفحه $z = 0$ ، مثل شکل ۴۸، کراندار باشد. در این صورت، طبق تقارن، $\bar{x} = \bar{y} = 0$ ، و

$$\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_T z dx dy dz,$$



شکل ۴۸

که در آن $V = \frac{3}{4}\pi a^3$ حجم نیمکره می باشد. با استفاده از قضیه ۹ برای تبدیل به مختصات استوانه‌ای، داریم

$$\iiint_T z \, dx \, dy \, dz = \iiint_{T'} z r \, dr \, d\theta \, dz,$$

که در آن T' ناحیه‌ای در فضای $r\theta z$ است که به صفحات $r=0$, $\theta=0$, $\theta=2\pi$, $z=0$ استوانه $r^2+z^2=a^2$ محدود شده است (به یاد آورید که در هر دو مختصات قطبی و استوانه‌ای، $x^2+y^2=r^2$) . با رفتن به انتگرال مکرر، داریم

$$\begin{aligned} \iiint_{T'} z r \, dr \, d\theta \, dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a dr \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r z \, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^{\sqrt{a^2-r^2}} dr \\ &= \pi \int_0^a r(a^2-r^2) \, dr = \pi \left[\frac{1}{2} a^2 r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^a = \frac{1}{4} \pi a^4, \end{aligned}$$

و لذا،

$$\bar{z} = \frac{\frac{1}{4}\pi a^4}{\frac{3}{4}\pi a^3} = \frac{3}{8} a.$$

لذا، مرکز گون T عبارت است از $(0, 0, \frac{3}{8}a)$.

مثال ۴. فرض کنید T یک استوانه مستدیر توپر همگن به شعاع a و ارتفاع h باشد. گشتاور ماند T را حول محورش بیابید.

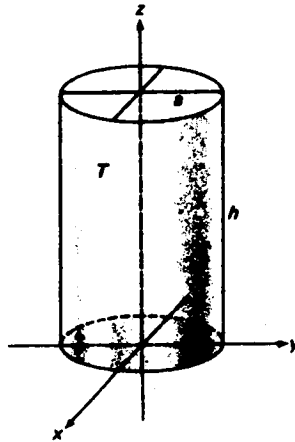
حل. فرض کنیم T به سطح استوانه‌ای $x^2+y^2=a^2$ و صفحات $z=0$ و $z=h$ ، مثل شکل ۴۹، محدود شده باشد، و ρ چگالی ثابت T باشد. در این صورت، با رفتن به انتگرال مکرر، معلوم می شود که گشتاور ماند استوانه T حول محورش (محور z) مساوی است با

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_T (x^2+y^2)\rho \, dV = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (\rho r^2) r \, dr \\ &= \rho \left(\int_0^h dz \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^a r^3 \, dr \right) = 2\pi\rho h \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^a = \frac{1}{2} \rho\pi a^4 h. \end{aligned}$$

چون جرم کل T مساوی است با $M = \rho\pi a^2 h$ ، I_x را می توان به شکل فشرده

$$I_x = \frac{1}{2} M a^2$$

نوشت .



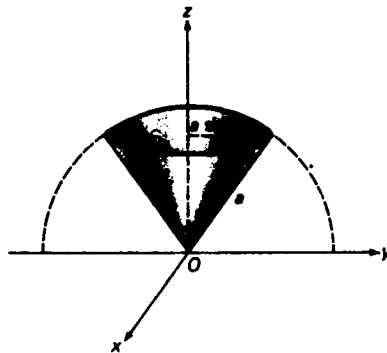
شکل ۴۹

مثال ۵. حجم V ناحیه^۶ توپر T را که از بالا به کره^۷ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ به شعاع a و از پایین به مخروط

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \cot \phi \quad (0 < \phi < \pi),$$

که مولدهایش با محور z زاویه^۸ ϕ می سازند، پیدا نمایید .

حل . ناحیه^۹ T به ازای مقادیر کوچک زاویه^{۱۰} ϕ به شکل مخروط بستنی پر، مثل شکل ۵۰، است . در مختصات استوانه‌ای، کره و مخروط به معادلات $r^2 + z^2 = a^2$ و $z = r \cot \phi$ بوده، و از شکل واضح است که دو سطح به ازای $r = a \sin \phi$ همدیگر را قطع می‌کنند . بنا



شکل ۵۰

براین، به کمک قضیه ۹،

$$\begin{aligned} V &= \iiint_T dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sin\phi} dr \int_{r \cot\phi}^{\sqrt{a^2-r^2}} r dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sin\phi} (\sqrt{a^2-r^2} - r \cot\phi) r dr \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{3/2} - \frac{1}{3}r^3 \cot\phi \right]_0^{\sin\phi} \\ &= \frac{2}{3}\pi a^3(1 - \cos^3\phi - \sin^3\phi \cot\phi) \\ &= \frac{2}{3}\pi a^3[1 - \cos^3\phi - (1 - \cos^2\phi)\cos\phi]. \end{aligned}$$

لذا، ما "داریم"

$$(۸) \quad V = \frac{2}{3}\pi a^3(1 - \cos\phi).$$

خصوصاً، از (۸) نتیجه می‌شود که اگر $\phi = \pi/2$ ، $V = \frac{2}{3}\pi a^3$ ، و این چیزی است که انتظار آن می‌رفت (چرا؟).

مسائل

مختصات قائم نقطه به مختصات استوانه‌ای داده شده را بیابید.

$$r = 1, \theta = 1, z = 1 \quad . ۲ \checkmark \quad r = \sqrt{3}, \theta = 5\pi/6, z = 0 \quad . ۱ \checkmark$$

$$r = 0, \theta = 9\pi/10, z = -5 \quad . ۴ \checkmark \quad r = 10, \theta = \pi, z = 2\pi \quad . ۳ \checkmark$$

مختصات استوانه‌ای نقطه به مختصات قائم داده شده را بیابید.

$$x = 3, y = \sqrt{3}, z = 13 \quad . ۶ \checkmark \quad x = -4, y = 4, z = -2 \quad . ۵ \checkmark$$

$$x = -5, y = -12, z = 0 \quad . ۸ \checkmark \quad x = 1, y = -\sqrt{3}, z = -6 \quad . ۷ \checkmark$$

معادله داده شده را از مختصات قائم به استوانه‌ای تبدیل کنید.

$$x + y + z = 8 \quad . ۱۰ \checkmark \quad x^2 - y^2 = z^2 \quad . ۹ \checkmark$$

$$z = 2xy \quad . ۱۲ \checkmark \quad x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad . ۱۱ \checkmark$$

انتگرال سه‌گانه داده شده را با تبدیل مختصات قائم به استوانه‌ای حساب کنید.

$$x^2 + y^2 = 2x \quad . ۱۳ \checkmark \quad \iiint_T (x^2 + y^2) dx dy dz \quad . ۱۳ \checkmark$$

که در آن T ناحیه توپر محدود به استوانه $x^2 + y^2 = 2x$

و صفحات $z=0$ و $z=2$ است .

۱۴ ✓ $\iiint_T xz \, dx \, dy \, dz$ ، که در آن T ناحیه توپر واقع در یکپهشت اول و محدود به سهمی

گون $z = x^2 + y^2$ و صفحات $x=0$ ، $y=0$ ، و $z=4$ است .

۱۵ ✓ $\iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$ ، که در آن T ناحیه توپر محدود به استوانه $x^2 + y^2 = 3$

و صفحات $z = \pm 1$ است .

۱۶ ✓ $\iiint_T x^2 y^2 \, dx \, dy \, dz$ ، که در آن T ناحیه توپر محدود به مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و صفحه

$z = a > 0$ است .

۱۷ ✓ $\iiint_T y^2 z \, dx \, dy \, dz$ ، که در آن T ناحیه توپری است که از بالا به کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

و از پایین به مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ محدود است .

۱۸ ✓ $\iiint_T (x^3 + y^3) \, dx \, dy \, dz$ ، که در آن T ناحیه توپر محدود به استوانه $x^2 + y^2 = y$

سهمی گون $z = x^2 + y^2$ ، و صفحه xy است .

حجم V ناحیه توپر T داده شده را با استفاده از مختصات استوانه‌ای پیدا نمایید .

۱۹ ✓ T به صفحه xy ، استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ به شعاع a ، و اولین دور مارپیچ گون

$z = a\theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) محدود است .

۲۰ ✓ T به صفحه xy ، استوانه $x^2 + y^2 = 4$ ، و صفحه $x + y + z = 6$ محدود است .

۲۱ ✓ T به استوانه مستدیر $x^2 + y^2 = 2x$ و استوانه سهمی $z = 4x$ محدود است .

۲۲ ✓ T به هندلولی گون دوار یک پارچه $1 - z^2 = x^2 + y^2$ و کره $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ محدود

بوده و شامل مبدا است .

۲۳ ✓ مرکز گون ناحیه توپر T مثال ۴ ، صفحه ۱۳۹۹ ، را به کمک مختصات استوانه‌ای بیابید .

۲۴ با استفاده از مختصات استوانه‌ای ، جوابهای دیگر مثالهای ۴ و ۵ ، صفحات ۱۳۶۳ و

۱۳۶۶ ، را به دست آورید .

۲۵ گشتاور ماند یک استوانه مستدیر توپر همگن به جرم M ، شعاع a ، و ارتفاع h را حول

یکی از اقطار قاعده‌اش بیابید . با استفاده از قضیه محور موازی (ر. ک. مسئله ۱۵ ،

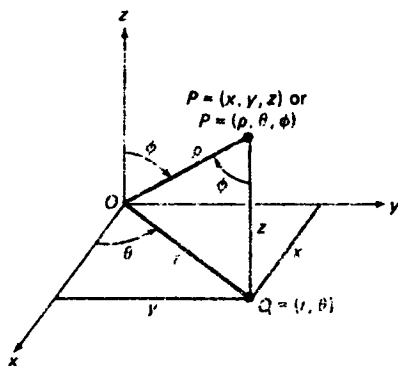
صفحه ۱۳۹۰) ، گشتاور ماند استوانه را حول محوری مار بر مرکز جرم آن و عمود بر

محور تقارنش پیدا نمایید .

۲۶. گشتاور ماند یک استوانه^۶ مستدیر توخالی همگن به جرم M ، شعاع داخلی a_1 ، و شعاع خارجی a_2 را حول محور تقارنش پیدا نمایید. همچنین، گشتاور ماند یک لوله^۶ مستدیر با جداره^۶ نازک به جرم M و شعاع a را حول محور تقارنش پیدا نمایید.

۸.۱۴ انتگرالهای سه‌گانه در مختصات کروی

همانطور که مختصات استوانه‌ای در مسائلی که اجسام تقارن استوانه‌ای دارند مفید است، مختصاتی که اینک معرفی می‌شوند معمولاً "بهترین مختصات در رابطه با اشیایی مانند گویها و غشاءهای کروی، که تقارن کروی دارند، یعنی تقارن نسبت به یک نقطه در فضا که می‌توان آن را مبدأ^۶ گرفت دارند، می‌باشند. فرض کنیم P به مختصات قائم x ، y ، و z بوده، $\rho = |OP|$ فاصله^۶ بین مبدأ^۶ O و P باشد، و زاویه^۶ ϕ از محور z مثبت به OP (زویه پایین) سنجیده شود (ر. ک. شکل ۵۱). همچنین، فرض کنیم θ همان زاویه در مختصات استوانه‌ای باشد؛ یعنی، زاویه از محور x مثبت به OQ باشد، که در آن Q تصویر P روی صفحه^۶ xy است (θ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت توسط ناظری روی صفحه^۶ xy که از طرف مثبت z به پایین نگاه می‌کند سنجیده می‌شود). در این صورت، گوییم نقطه^۶ P به مختصات کروی ρ ، θ ، و ϕ است، و علاوه بر $P = (\rho, \theta, \phi)$ ، می‌نویسیم $P = (x, y, z)$. مختصات شعاعی ρ را می‌توان هر مقدار در بازه^۶ $[0, \infty)$ گرفت، ولی مشروط به $0 \leq \phi \leq \pi$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$ را بر مختصات زاویه‌ای θ و ϕ می‌گذاریم. با پیروی از معانی جغرافیایی آنها، θ را طول جغرافیایی و ϕ را متمم عرض جغرافیایی می‌نامیم. چون مختص شعاعی با ρ نموده شده است،



شکل ۵۱

در مسائل مربوط به توزیعهای متقارن کروی جرم باید از علامت دیگری برای تابع چگالی، مثلاً δ ، استفاده نمود.

با بررسی شکل معلوم می‌شود که نقطه به مختصات کروی ρ ، θ ، و ϕ دارای مختصات استوانه‌ای r ، θ ، و z است، که

$$r = \rho \sin \phi, \quad \theta = \theta, \quad z = \rho \cos \phi,$$

و در نتیجه، مختصات قائم زیر را دارد:

$$(1) \quad x = r \cos \theta = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = r \sin \theta = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi.$$

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که، بنابر (۱)،

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0),$$

(۲)

$$\cos \phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (x^2 + y^2 + z^2 \neq 0).$$

مثال ۱. بنابر (۱)، نقطه به مختصات کروی $\rho = \sqrt{2}$ ، $\theta = \pi/3$ ، $\phi = \pi/4$ دارای مختصات قائم

$$x = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad y = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} = 1$$

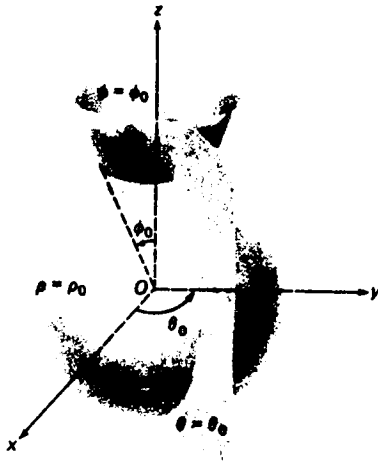
است ولی، طبق (۲)، نقطه به مختصات قائم $x = 1$ ، $y = -1$ ، $z = \sqrt{2}$ دارای مختصات کروی

$$\rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2, \quad \theta = \arctan(-1) + 2\pi = \frac{7\pi}{4},$$

$$\phi = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

می‌باشد (چرا در فرمول دوم 2π اضافه می‌کنیم؟)

نمودار معادله $\rho = \rho_0 > 0$ در مختصات کروی کره‌ای به شعاع ρ_0 و مرکز مبدأ، و نمودار $\rho = 0$ فقط خود مبدأ می‌باشد. به همین نحو، نمودار $\theta = \theta_0$ نیم‌صفحه‌ای است که محور z به عنوان لبه‌اش زاویه θ_0 با صفحه xz می‌سازد، و نمودار $\phi = \phi_0$ یک پارچه از یک مخروط مستدیر قائم به رأس مبدأ و مولدهایی است که با محور z مثبت زاویه ϕ_0 می‌سازد (ر. ک. شکل ۵۲). توجه کنید که نمودار $\phi = \phi_0$ به محور z مثبت تحویل می‌شود اگر



شکل ۵۲

اگر $\phi_0 = 0$ ، به صفحه xy تحویل می‌شود اگر $\phi_0 = \pi/2$ ، و به محور z منفی بدل می‌شود
اگر $\phi_0 = \pi$.

مثال ۲. معادله کره S به معادله دکارتی

$$(۳) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2az \quad (a > 0)$$

را در مختصات کروی بنویسید .

حل . چون (۳) معادل $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$ است ، کره‌ای به شعاع a و به مرکز نقطه $(0, 0, a)$ از محور z است . با جانشانی از (۱) معلوم می‌شود که (۳) به $\rho^2 = 2a\rho \cos \phi$ یا معادلا

$$\rho = 2a \cos \phi$$

تبدیل می‌شود (تقسیم بر ρ را توجیه کنید) .

در محاسبه انتگرال سه‌گانه

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz$$

روی ناحیه سه‌بعدی نرمال T ، در حالتی که T تقارن کروی دارد ، معمولا " تبدیل به مختصات

کروی سودمند است. فرض کنیم علاوه بر فضای معمولی xyz ، که در آن هر نقطه مختصات قائم x ، y ، z و مختصات کروی r ، θ ، ϕ و دارد، "فضای $\rho\theta\phi$ " را نیز معرفی می‌کنیم، که در آن مختصات ρ ، θ ، ϕ و مختصات قائم می‌باشند. فرض کنیم T' ناحیه‌ای در فضای $\rho\theta\phi$ باشد که T نقش آن تحت تبدیل مختصات (۱) است. در این صورت، قضیه زیر را داریم که به قضیه ۹، صفحه ۱۴۰۶، برای مختصات استوانه‌ای شبیه است.

قضیه ۱۰ (انتگرالهای سه‌گانه در مختصات کروی). هرگاه $f(x, y, z)$ بر T پیوسته باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} & \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz \\ (۴) \quad & = \iiint_{T'} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi. \end{aligned}$$

برهان ناقص. فرض کنیم T' در جعبه $A \leq \phi \leq B$ ، $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ، $a \leq \rho \leq b$ در فضای $\rho\theta\phi$ باشد. همچنین، نقاط ρ_j ($j = 0, 1, \dots, J$)، θ_k ($k = 0, 1, \dots, K$)، ϕ_l ($l = 0, 1, \dots, L$) افزایشی از بازه‌های $[a, b]$ ، $[\alpha, \beta]$ ، و $[A, B]$ با اندازه‌های مش μ_ρ ، μ_θ ، μ_ϕ باشند. در این صورت، صفحات $\rho = \rho_j$ ، $\theta = \theta_k$ ، $\phi = \phi_l$ موازی صفحات مختصات فضای $\rho\theta\phi$ ، T' را به n زیر ناحیه بسته T'_1, T'_2, \dots, T'_n تقسیم می‌کنند که اغلب جعبه بوده و $n \leq JKL$ (معمولا " $n < JKL$ "). کرات، نیم‌صفحه‌ها، و مخروطها در فضای xyz با همان معادلات $\rho = \rho_j$ ، $\theta = \theta_k$ ، $\phi = \phi_l$ را به n زیر ناحیه بسته T_1, T_2, \dots, T_n تقسیم می‌کنند که T_i نقش T'_i تحت تبدیل (۱) است. فرض کنیم

$$\mu = \max \{ \mu_\rho, \mu_\theta, \mu_\phi \},$$

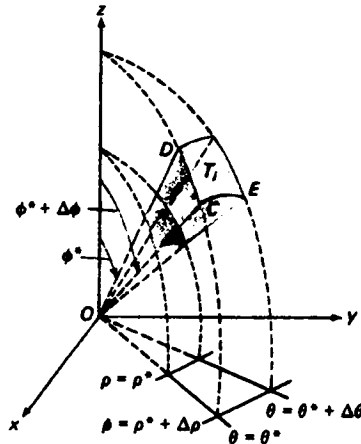
و ΔV_i و $\Delta V'_i$ حجمهای T_i و T'_i باشند. همچنین، فرض کنیم $P_i = (\rho'_i, \theta'_i, \phi'_i)$ نقطه دلخواهی از T'_i بوده، و $P_i = (p_i, q_i, s_i)$ نقش P'_i تحت (۱) باشد. در این صورت،

$$\begin{aligned} & \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz \\ (۵) \quad & = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(p_i, q_i, s_i) \Delta V_i \\ & = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\rho'_i \sin \phi'_i \cos \theta'_i, \rho'_i \sin \phi'_i \sin \theta'_i, \rho'_i \cos \phi'_i) \frac{\Delta V'_i}{\Delta V_i} \Delta V'_i. \end{aligned}$$

حال فرض کنیم T_i جعبه^۶

$$\rho^* \leq \rho \leq \rho^* + \Delta\rho, \quad \theta^* \leq \theta \leq \theta^* + \Delta\theta, \quad \phi^* \leq \phi \leq \phi^* + \Delta\phi$$

به حجم $\Delta V_i = \Delta\rho \Delta\theta \Delta\phi$ باشد. در این صورت، T_i "گوه^۷ کروی" شکل ۵۳ است که به دو کره^۸ $\rho = \rho^*$ و $\rho = \rho^* + \Delta\rho$ ، دو نیمصحه^۹ $\theta = \theta^*$ و $\theta = \theta^* + \Delta\theta$ ، و دو مخروط



یک گوه^۷ کروی

شکل ۵۳

$\phi = \phi^*$ و $\phi = \phi^* + \Delta\phi$ محدود است. لذا، به کمک مثال ۵، صفحه^{۱۰} ۱۴۱۰، درمی یابیم که

$$\begin{aligned} \Delta V_i &= \frac{2\pi}{3} \frac{\Delta\theta}{2\pi} [(\rho^* + \Delta\rho)^3 - \rho^{*3}] [1 - \cos(\phi^* + \Delta\phi) - (1 - \cos \phi^*)] \\ (۶) \quad &= -\frac{\Delta\theta}{3} [(\rho^* + \Delta\rho)^3 - \rho^{*3}] [\cos(\phi^* + \Delta\phi) - \cos \phi^*]. \end{aligned}$$

اما، با دو بار استفاده از قضیه^{۱۱} مقدار میانگین،

$$(۷) \quad (\rho^* + \Delta\rho)^3 - \rho^{*3} = 3\rho_i^{*2} \Delta\rho, \quad \cos(\phi^* + \Delta\phi) - \cos \phi^* = -\sin \phi_i^* \Delta\phi,$$

که در آن $\rho^* < \rho_i^* < \rho^* + \Delta\rho$ و $\phi^* < \phi_i^* < \phi^* + \Delta\phi$ (زیرنویس کمیات ρ_i^* و ϕ_i^* نشان می دهند که با ناحیه^{۱۲} T_i در ارتباطند). با گذاردن (۷) در (۶)، به دست می آوریم

$$(۸) \quad \Delta V_i = \rho_i^{*2} \sin \phi_i^* \Delta\rho \Delta\theta \Delta\phi = \rho_i^{*2} \sin \phi_i^* \Delta V_i'$$

واضح است که نقاطی در T_i به ρ -مختص ρ_i^* و ϕ -مختص ϕ_i^* وجود دارند، و چون $P_i = (\rho_i', \theta_i', \phi_i')$

نقطه^{۱۳} دلخواهی از T_i است، می توان فرض کرد $\rho_i' = \rho_i^*$ و $\phi_i' = \phi_i^*$. در این صورت، (۸)

به شکل $\Delta V_i = \rho_i'^2 \sin \phi_i' \Delta V_i'$ یا معادلا

$$(۹) \quad \frac{\Delta V_i}{\Delta V_i'} = \rho_i'^2 \sin \phi_i'$$

درمی‌آید. اگر تمام نواحی T_i' جعبه باشند، می‌توان (۹) را در (۵) گذارده به دست آورد

$$\begin{aligned} & \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\rho_i' \sin \phi_i' \cos \theta_i, \rho_i' \sin \phi_i' \sin \theta_i, \rho_i' \cos \phi_i') \rho_i'^2 \sin \phi_i' \Delta V_i' \\ &= \iiint_{T'} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi, \end{aligned}$$

و فرمول (۴) ثابت می‌شود. در حالت کلی، بعضی از نواحی T_i' غیرمستطیلی اند، ولی می‌توان نشان داد که این خدش‌های به اعتبار (۴) وارد نخواهد ساخت.

چگونه فرمول (۴) را به یاد بیاوریم. بررسی شکل ۵۳ نشان می‌دهد که ناحیه T_i' در صورت کوچک بودن $\Delta \rho$ ، $\Delta \theta$ ، و $\Delta \phi$ تقریباً "مکعب مستطیلی" است که چهار ضلع مستقیم آن به طول $\Delta \rho$ ، چهار ضلع خمیده‌اش مانند CD به طول تقریبی $\rho \Delta \phi$ ، و چهار ضلع خمیده‌اش مانند CE به طول تقریبی $\rho \sin \phi \Delta \theta$ اند، که در آن ρ و ϕ مختصات شعاعی و متمم عرض جغرافیایی نقطه دلخواهی در T_i' می‌باشند. لذا، حجم T_i' تقریباً "مساوی است با $\rho^2 \sin \phi \Delta \rho \Delta \theta \Delta \phi$ " این وجود عبارت $\rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$ در انتگرال سه‌گانه روی T' را توضیح داده، و به یاد آوردن فرمول (۴) را آسان می‌سازد.

حاجت به گفتن نیست که انتگرال سه‌گانه

$$\iiint_{T'} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$$

به کمک انتگرالهای مکرر حساب می‌شود. این امر در مثالهای زیر توضیح داده شده است.

مثال ۳. با استفاده از مختصات کروی مرکزگون $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ نیمکره توپری T به شعاع a را پیدا کنید.

حل. این مسئله قبلاً در مثال ۳، صفحه ۱۴۰۸، به کمک مختصات استوانه‌ای حل شده

است، ولی حل آن در مختصات کروی آسانتر است. فرض کنیم T از بالا به کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و از پایین به صفحه $z = 0$ محدود باشد. مجدداً، "طبق تقارن، $\bar{x} = \bar{y} = 0$ ، و

$$\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_T z \, dx \, dy \, dz,$$

که در آن $V = \frac{2}{3}\pi a^3$ حجم نیمکره است. با استفاده از قضیه ۱۰ در تبدیل به مختصات کروی، داریم

$$\iiint_T z \, dx \, dy \, dz = \iiint_T (\rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi,$$

که در آن T' جعبه‌ای در فضای $\rho\theta\phi$ است که به صفحات $\rho = 0, \rho = a, \theta = 0$ و $\phi = 0, \phi = \pi/2, \theta = 2\pi$ محدود است. با رفتن به انتگرال مکرر به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \iiint_{T'} \rho^3 \cos \phi \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^a \rho^3 \cos \phi \sin \phi \, d\rho \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin \phi \cos \phi \, d\phi \right) \left(\int_0^a \rho^3 \, d\rho \right) \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2} \sin^2 \phi \right]_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^a = \frac{1}{4} \pi a^4, \end{aligned}$$

و در نتیجه، مثل قبل،

$$\bar{z} = \frac{\frac{1}{4} \pi a^4}{\frac{2}{3} \pi a^3} = \frac{3}{8} a.$$

لذا، مرکز گون T نقطه $(0, 0, \frac{3}{8}a)$ می‌باشد.

مثال ۴. با استفاده از مختصات کروی، گشتاور ماند I_1 کره^۶ توپر همگن T به شعاع a حول محور l ماربر مرکزها بیابید.

حل. با انتخاب مبدأ دستگاه مختصات قائم x, y, z ، که l محور x آن است، به عنوان مرکز T خللی به کلیت وارد نمی‌شود. چون کره^۶ T همگن است، چگالی δ آن ثابت می‌باشد. بنابراین،

$$I_1 = I_x = \delta \iiint_T (y^2 + z^2) \, dV$$

$$= 2\delta \iiint_T z^2 dV = \frac{2\delta}{3} \iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) dV,$$

که در آن از

$$\iiint_T x^2 dV = \iiint_T y^2 dV = \iiint_T z^2 dV,$$

به خاطر تقارن، استفاده شده است. با تبدیل به مختصات کروی (بدون معرفی صریح ناحیه T')، داریم

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2\delta}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\phi \int_0^a (\rho^2)\rho^2 \sin \phi d\rho \\ &= \frac{2\delta}{3} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^\pi \sin \phi d\phi \right) \left(\int_0^a \rho^4 d\rho \right) \\ &= \frac{4\pi\delta}{3} \left[-\cos \phi \right]_0^\pi \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_0^a = \frac{8\pi\delta}{15} a^5. \end{aligned}$$

فرض کنیم M جرم کل T باشد. در این صورت،

$$M = \frac{4\pi\delta}{3} a^3,$$

در نتیجه، می توان I_1 را به شکل فشرده زیر نوشت:

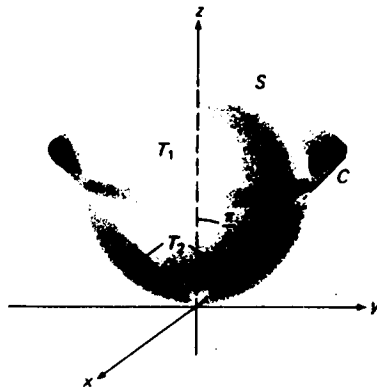
$$I_1 = \frac{2}{5} Ma^2.$$

مثال ۵. فرض کنیم S کره ای به معادله $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ ($a > 0$) باشد؛ یعنی، کره ای به شعاع a و مرکز $(0, 0, a)$ از محور z . نشان دهید که مخروط C به معادله $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ درون S را به دو قسمت تقسیم می کند که یکی سه برابر دیگری می باشد.

حل. در مثال ۲ دیدیم که S در مختصات قطبی به معادله

$$\rho = 2a \cos \phi$$

است. همانطور که شکل ۵۴ در مقطع عرضی نشان می دهد، پارچه بالایی C درون S را به دو قسمت T_1 و T_2 تقسیم می کند، و مولدهای C با محور z زاویه $\pi/4$ می سازند. لذا، حجم



شکل ۵۴

T_1 مساوی است با

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} d\phi \int_0^{2a \cos \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \left[\frac{1}{3} \rho^3 \right]_0^{2a \cos \phi} \sin \phi d\phi \\ &= \frac{8a^3}{3} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/4} \cos^3 \phi \sin \phi d\phi \right) = \frac{16\pi a^3}{3} \left[-\frac{1}{4} \cos^4 \phi \right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^4 \right] = \pi a^3, \end{aligned}$$

ولی حجم T_2 برابر است با

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi a^3 - V_1 = \frac{1}{3} \pi a^3.$$

بنابراین، $V_1 = 3V_2$ ؛ در نتیجه، حجم T_1 سه برابر حجم T_2 می باشد.

در بخشهای ۶.۱۴ تا ۸.۱۴ طرز محاسبه بعضی از انتگرالهای مضاعف و سه گانه را با رفتن از مختصات قائم به قطبی، استوانهای، و کروی نشان دادیم. خواهیم دید که قضایای ۸ تا ۱۰ همه نتایجی هستند از یک بحث کلی تغییر متغیر در انتگرالهای چندگانه که در آخر بخش ۴.۱۵ مطرح شده است.

مسائل

مختصات قائم نقطه به مختصات کروی داده شده را بیابید .

۱. $\rho = 1, \theta = \pi, \phi = \pi/2$ ✓

۲. $\rho = \sqrt{6}, \theta = 3\pi/4, \phi = \pi/3$ ✓

۳. $\rho = 4, \theta = 5\pi/6, \phi = \pi/6$ ✓

۴. $\rho = 2, \theta = 0, \phi = 3\pi/4$ ✓

مختصات کروی نقطه به مختصات قائم داده شده را بیابید .

۵. $x = -1, y = 1, z = 1$ ✓

۶. $x = 0, y = 1, z = -\sqrt{3}$ ✓

۷. $x = 4, y = -12, z = 3$ ✓

۸. $x = 6, y = 2, z = 9$ ✓

معادله داده شده را از مختصات قائم به کروی تبدیل کنید .

۹. $x^2 + y^2 = 4$ ✓

۱۰. $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ ✓

۱۱. $x^2 + y^2 = z^2$ ✓

۱۲. $x^2 - y^2 = z^2$ ✓

انتگرال سه گانه داده شده را با تبدیل مختصات قائم به کروی حساب کنید .

۱۳. $\iiint_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ ، که در آن T گوی $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ ($a > 0$) است .

۱۴. $\iiint_T (x^2 + y^2) dx dy dz$ ، که در آن T ناحیه توپر است که از بالا به کره یکه

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و از پایین به مخروط $z = -\sqrt{4(x^2 + y^2)}$ محدود است .

۱۵. $\iiint_T yz dx dy dz$ ، که در آن T بخشی از غشاء کروی $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ است که در

یکهشت اول قرار دارد .

۱۶. $\iiint_T \frac{dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2}$ ، که در آن T ناحیه توپر محدود به استوانه $x^2 + y^2 = 4$ و

پارچه های مخروط $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ است .

۱۷. $\iiint_T \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}}$ ، که در آن T گوی یکه $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ است .

۱۸. $\iiint_T \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ ، که در آن T غشای کروی $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq e$ است .

۱۹. $\iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ ، که در آن T گوی $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$ است .

۲۰. $\iiint_T \sqrt{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx dy dz$ ، که در آن T گوی $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3^{2/3}$ است .

با استفاده از مختصات کروی ، حجم V ناحیه توپر داده شده T را بیابید .

۲۱. T فصل مشترک کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4z - 3$ با مخروط $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ است و در داخل مخروط قرار دارد .

۲۲. T داخل پارچه های مخروط $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ و بین کرات $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ قرار دارد .

۲۳. T محصور به سطح $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 8z$ است .

۲۴. T محصور به سطح $xyz = (x^2 + y^2 + z^2)^3$ است .

۲۵. چگالی یک غشاء کروی به شعاع داخلی 10 cm و شعاع خارجی 12 cm در نقطه متغیر P با فاصله P تا مرکز غشاء نسبت عکس دارد . جرم کل غشاء را در صورتی بیابید که چگالی در سطح داخلی اش 3 g/cm^3 باشد .

۲۶. مرکز گون بخش T از کره توپر $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ ($a > 0$) را بیابید که در یک هشتم اول قرار دارد .

۲۷. مرکز گون ناحیه توپر T را بیابید که از بالا به کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و از پایین به مخروط $z = \sqrt{\frac{1}{3}(x^2 + y^2)}$ محدود باشد .

۲۸. گشتاور ماند گوی توخالی همگنی به جرم M ، شعاع داخلی a_1 ، و شعاع خارجی a_2 را حول محور l مار بر مرکز آن بیابید . همچنین ، گشتاور ماند یک غشاء کروی با جداره نازک به جرم M و شعاع a را حول چنین محور پیدا کنید .

اصطلاحات و مباحث کلیدی

انتگرال مضاعف روی یک ناحیه مسطح

مساحت یک ناحیه و حجم زیر یک سطح به عنوان انتگرالهای مضاعف

انتگرالهای مکرر و موارد استعمال آنها در محاسبه انتگرالهای مضاعف

انتگرال سه گانه روی یک ناحیه توپر

حجم یک ناحیه توپر به عنوان انتگرال سه گانه

محاسبه انتگرالهای سه گانه بر حسب انتگرالهای مکرر

محاسبه جرم یک ناحیه مسطح یا توپر به وسیله چگالی اش

مرکز جرم و گشتاورهای یک دستگاه از ذرات

مرکز جرم و گشتاورهای یک ورقه یا جسم جامد

مرکز گون یک ناحیه^۶ مسطح یا توپر
 مرکز جرم یک سیم با چگالی متغیر، مرکز گون یک منحنی
 قضیه^۶ پایوس برای جسم دوار
 قضیه^۶ پایوس برای سطح دوار
 گشتاورهای ماند و شعاعهای چرخش
 انتگرالهای مضاعف در مختصات قطبی
 انتگرالهای سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای و کروی

مسائل تکمیلی

انتگرال مکرر داده شده را حساب کنید .

۰۱ $\int_0^3 dy \int_0^1 xy dx$ ۰۲ $\int_0^1 dx \int_{-1}^0 2^{x+y} dy$

۰۳ $\int_1^e dx \int_{1/x}^x \ln x dy$ ۰۴ $\int_0^{\pi/2} dy \int_0^y \sin(x+y) dx$

۰۵ $\int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{x/y} dx$ ۰۶ $\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2 \sin \theta} r^2 \cos \theta dr$

۰۷ انتگرال مضاعف

$$\iint_R \frac{y}{x^2 + y^2} dA$$

را در صورتی حساب کنید که R ناحیه^۶ محدود به خط $y = x$ و سهمی $y = x^2$ باشد .

۰۸ فرض کنید R ناحیه^۶ محدود به محور x و منحنی

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0)$$

(یک قوس کامل چرخزاد) باشد. نشان دهید که $\iint_R y dA = \frac{2}{3}\pi a^3$. مرکز گون R را

پیدا نمایید .

۰۹ حجم ناحیه^۶ توپر محدود به استوانه^۶ بیضوی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ ، صفحه^۶ xy ، و

$z = ax + by + h$ را که بالای اثر استوانه در صفحه^۶ xy قرار دارد بیابید .

۱۰ حجم ناحیه^۶ توپر محدود به سهمی گون دوار $z = x^2 + y^2$ ، استوانه سهمی $y = x^2$

صفحه^۶ xy ، و صفحه^۶ $y = 1$ را بیابید .

۱۱ حجم ناحیه^۶ توپر جدا شده از استوانه^۶ مستدیر $x^2 + y^2 = 2x$ به وسیله^۶ سهمی گون

دوار $y^2 + z^2 = 4x$ را پیدا کنید .

۱۲ . با استفاده از انتگرال مضاعف ، نشان دهید هرگاه $f(x)$ و $g(x)$ بر $[a, b]$ پیوسته باشند ،
آنگاه

$$(یک) \quad \left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}.$$

این نامساوی کوشی - شوارتز برای انتگرالهاست (قس . نامساوی کوشی - شوارتز برای
مجموعها ، که در مسئله ۴۷ ، صفحه ۱۰۷۱ ، داده شده است) .
راهنمایی . انتگرال مضاعف

$$\iint_R [f(x)g(y) - f(y)g(x)]^2 dx dy$$

را در نظر بگیرید ، که در آن R مربع محدود به خطوط $x = a$ ، $x = b$ ، $y = a$ ، و
 $y = b$ است .

۱۳ . نشان دهید هرگاه تابع $f(x)$ بر $[a, b]$ مثبت و پیوسته باشد ، آنگاه

$$(دو) \quad \sqrt{\int_a^b f(x) dx} \sqrt{\int_a^b \frac{dx}{f(x)}} \geq b - a.$$

۱۴ . نامساوی (یک) را به ازای توابع $f(x) = e^x$ و $g(x) = x$ بر بازه $[0, 1]$ تحقیق نمایید .
نامساوی (دو) را به ازای تابع $f(x) = x$ بر بازه $[1, 2]$ تحقیق نمایید .

۱۵ . $\iiint_V \sin x \cos y \tan z dV$ را در صورتی حساب کنید که T جعبه محدود به صفحات
 $x = 0$ ، $x = \pi/2$ ، $y = 0$ ، $y = \pi/6$ ، $z = 0$ ، و $z = \pi/3$ باشد .

۱۶ . همانطور که در صفحه ۷۰۹ نشان دادیم ، حجم V جسم T حاصل از دوران نمودار
تابع نامنفی پیوسته $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) حول محور x از فرمول $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$
به دست می آید . این فرمول را با استفاده از انتگرال سه گانه به دست آورید .

۱۷ . چگالی یک ورقه مربعی به ضلع ۶ cm در نقطه متغیر P با مجذور فاصله P تا یکی از
رئوس مربع متناسب است . جرم کل ورقه را در صورتی بیابید که چگالی در مرکز مربع
 3 g/cm^2 باشد .

۱۸ . جرم کل جعبه محدود به صفحات مختصات و صفحات $x = 1$ ، $y = 3$ ، و $z = 5$ را در
صورتی بیابید که تابع چگالی $\rho(x, y, z) = x + y + z$ باشد .

۱۹ . جرم کل جسم واقع در یکپهشت اول و محدود به کره $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ، صفحات
مختصات ، و صفحه $3x + 2y = 6$ را در صورتی بیابید که تابع چگالی $\rho(x, y, z) = 12z$
باشد .

۲۰. نشان دهید که مرکز جرم یک دستگاه از سه ذره، غیر هم صفحه A ، B ، و C به جرمهای مساوی در نقطه تقاطع میانهای مثلث ABC قرار دارد.

۲۱. مرکز گون ناحیه R محدود به سهمیههای $y^2 = 4 + 2x$ و $y^2 = 4 - 4x$ را بیابید.

۲۲. مرکز گون ناحیه R محدود به منحنی $y = \cos x$ و خطوط $x = \pi/2$ و $y = 1$ را بیابید.

۲۳. مرکز گون ناحیه R محصور به نمودار معادله $y^2 = x^2(1 - x^2)$ ($x \geq 0$) را بیابید.

۲۴. مرکز جرم چهاروجهی T محدود به صفحات مختصات و صفحه $x + y + z = 1$ را در صورتی بیابید که چگالی T در نقطه متغیر P با فاصله P تا صفحه xyz متناسب باشد.

۲۵. مرکز گون ناحیه توپر T محدود به صفحات $x = 1$ ، $x = 3$ ، $y = 0$ ، $z = 0$ ، و $y + 2z = 2$ را بیابید.

۲۶. مرکز گون ناحیه توپر T محدود به سهمی گون بیضوی $y^2 + z = 2x^2$ و صفحه $z = 4$ را پیدا کنید.

۲۷. مختصات قائم مرکز گون منحنی مسطح $r = 2(1 - \cos \theta)$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) را، که نیمه بالایی دایره شکل ۶۵، صفحه ۱۰۰۴، است بیابید.

۲۸. مرکز گون منحنی مسئله ۸ (یک قوس کامل چرخزاد) را بیابید.

۲۹. با استفاده از قضایای پاپوس، حجم V و مساحت A ناحیه سه بعدی حاصل از دوران یک ناحیه نیمه مستدیر به شعاع r را حول خط مماس موازی قطرش بیابید.

۳۰. بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ حول خط $y = 3b$ دوران می کند. حجم V جسم دوار حاصل چقدر است؟

۳۱. گشتاور ماند I_1 ناحیه محدود به سهمی $y = x$ و خط $x = 1$ را حول خط l به معادله $y = 1$ بیابید.

۳۲. گشتاور ماند قطبی I_0 ناحیه محدود به منحنی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ و محورهای مختصات را بیابید.

گشتاور ماند I_2 ناحیه توپر محدود به سطوح زیر حول محور z را بیابید.

۳۳. کرات $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ (ر. ک. مسئله ۱۵، صفحه ۱۲۵۳)

۳۴. سهمی گون دوار $2z = x^2 + y^2$ و کره $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ (ر. ک. مسئله ۲۲، ۱۲۵۴)

۳۵. با استفاده از مختصات قطبی، انتگرال

$$\iint_R \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy$$

را که در آن R قرص یکه $x^2 + y^2 \leq 1$ است حساب کنید.

۳۶. با استفاده از مختصات قطبی، مثال ۶، صفحه ۱۳۳۴، را به صورتی دیگر حل کنید.

انتگرال مکرر داده شده را با تبدیل آن به مختصات قطبی حساب کنید.

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 \sqrt{x^2 + y^2} dy \quad \cdot ۳۷$$

$$\int_0^1 dx \int_0^x \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx \quad \cdot ۳۸$$

۳۹. با استفاده از مختصات قطبی، مساحت A ی ناحیه R محصور به منحنی $(x^2 + y^2)^2 = 2x^3$ را بیابید.

۴۰. مرکز گون (\bar{x}, \bar{y}) ناحیه R مسئله قبل را بیابید.

۴۱. گشتاور ماند یک قرص مستدیر به شعاع a را حول محور l که در نقطه‌ای از محیط قرص بر آن عمود است بیابید.

۴۲. انتگرال مکرر

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^3 z \sqrt{x^2 + y^2} dz$$

را با استفاده از مختصات استوانه‌ای حساب کنید.

۴۳. با استفاده از مختصات استوانه‌ای، حجم ناحیه توپر بین سهمی گون $z = x^2 + y^2$ و مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ را بیابید.

۴۴. نشان دهید که طول منحنی فضایی به معادلات پارامتری

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad z = z(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

در مختصات قطبی مساوی است با

$$L = \int_a^b \sqrt{r'^2 + r^2 \theta'^2 + z'^2} dt,$$

که در آن پریم مشتقگیری نسبت به t را نشان می‌دهد. پس از نوشتن معادلات پارامتری

مارپیچ مستدیر $x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = 4t$ در مختصات استوانه‌ای، از فرمول فوق

استفاده کرده طول یک دور مارپیچ را پیدا نمایید (قس. مثال ۳، صفحه ۱۱۷۶).

مختصات استوانه‌ای نقطه به مختصات کروی داده شده را بیابید.

$$\rho = 2, \theta = \pi/3, \phi = \pi/2 \quad \cdot ۴۵$$

$$\rho = \sqrt{2}, \theta = \pi, \phi = 3\pi/4 \quad \cdot ۴۶$$

$$\rho = \sqrt{3}, \theta = \pi/4, \phi = \pi/3 \quad \cdot ۴۷$$

مختصات کروی نقطه به مختصات استوانه‌ای داده شده را بیابید.

$$r = \sqrt{3}, \theta = 5\pi/6, z = -1 \quad \cdot ۴۸$$

$$r = 2, \theta = \pi/6, z = 2 \quad ۰۴۹$$

$$r = 3, \theta = \sqrt{\pi}, z = 4 \quad ۰۵۰$$

۰۵۱. انتگرال مکرر

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2 + y^2) dz$$

را با تبدیل به مختصات کروی حساب کنید.

۰۵۲. چگالی نیمکره^۳ توپر $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2ay, z \geq 0$ به شعاع a در نقطه^۳ متغیر P مساوی فاصله^۳ P تا مبدا^۳ است. جرم کل نیمکره را پیدا نمایید.

۰۵۳. گشتاور ماند یک کره^۳ توپر به جرم M و شعاع a را حول یک خط مماس آن بیابید.

۰۵۴. مقدار میانگین تابع $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ را روی گوی $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ به شعاع a بیابید

(ز.ک. مسئله^۳ ۳۲، صفحه^۳ ۱۳۵۵). این عدد را می توان "فاصله^۳ متوسط" بین نقاط گوی و مرکزش در نظر گرفت.

انتگرالهای خط و سطح^{۱۵}

در این فصل مطالعه *انتگرالهای خط* را که در بخش ۱۴.۱ آغاز شد از سر گرفته، *انتگرالهای خط* جدیدی را معرفی می‌کنیم که برای محاسبه کار انجام شده به وسیله نیروی متغیر وارد بر یک ذره متحرک در امتداد یک منحنی مناسب می‌باشد. همچنین، مفهوم *انتگرال مضاعف* را با پذیرش این امر که ناحیه *انتگرالگیری* سطح خمیده باشد تعمیم می‌دهیم. این کار ما را به مفهوم *انتگرال سطح* می‌رساند که در بخش ۳۰.۱۵ بررسی خواهد شد.

با *انتگرالهای خط و سطح* می‌توان چند تعمیم چند متغیره قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و *انتگرال*، یعنی *قضیه گرین*، *قضیه دیورژانس*، و *قضیه استوکس*، را که در بخشهای ۴۰.۱۵ تا ۶۰.۱۵ عرضه می‌شوند اثبات کرد. این نتایج در علوم کار بسته اهمیت زیادی داشته، و در واقع ضمن بررسی پدیده‌هایی فیزیکی نظیر *الکتریسیته*، *مغناطیس*، *ثقل*، و *شارش مایع* کشف شده‌اند.

یک موضوع جنبی *میدانهای برداری* است؛ یعنی، *توابعی برداری* از یک *شناسه برداری* یا *معادلا*، *توابعی برداری* از یک *نقطه متغیر* در صفحه یا در فضا. به بیان صوری، یک *میدان برداری* *فاعده* یا *روندی* است که به هر *نقطه* در یک *مجموعه* *دوایسه بعدی* از *نقاط* یک *و فقط* یک *بردار* *منتسب* می‌کند، *ولی* *روش* ما بر *معنی* *ملموس* *فیزیکی* *میدانهای* *بررداری* تأکید خواهد کرد.

۱۰.۱۵ انتگرالهای خط

انتگرالهای خط نسبت به *طول قوس*. *انتگرال* *خط* به صورت

$$(1) \quad \int_C f(x, y) ds$$

در صفحه یا

$$(۱') \quad \int_C f(x, y, z) ds$$

در فضا قبلاً" در بخش ۴.۱۴ به عنوان ابزاری برای محاسبهٔ مرکز جرم سیم خمیدهٔ C با چگالی متغیر معرفی شد. در این کاربرد، انتگرالده موجود در (۱) یا (۱') به شکل ρ ، $x\rho$ ، $y\rho$ ، یا $z\rho$ می‌باشد، که در آنها $\rho = \rho(x, y)$ یا $\rho = \rho(x, y, z)$ چگالی جرم سیم است، ولی نکاتی که به (۱) و (۱') منجر شدند بر هر تابع f پیوسته بر منحنی C در صفحه یا فضا که بیش از تعدادی متناهی خود قطعی نداشته باشد قابل اعمال اند. لذا،

$$(۲) \quad \int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

(ر. ک. صفحه ۱۳۶۷)، که در آن C یک منحنی مسطح به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

است، و

$$(۲') \quad \int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

(ر. ک. صفحه ۱۳۷۱)، که در آن C یک منحنی فضایی به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

است. توجه کنید که رابطهٔ (۲) را می‌توان از (۲') با حذف $z(t)$ به دست آورد.

انتگرالهای (۱) و (۱') را انتگرالهای خط f نسبت به طول قوس s می‌نامند. بدای f مثبت، هر انتگرال را می‌توان جرم کل یک سیم خمیده با چگالی متغیر f تعبیر کرد.

مثال ۱. انتگرال

$$\int_C ye^{-x} ds$$

را در صورتی حساب کنید که C منحنی مسطح

$$x = \ln(t^2 + 1), \quad y = 2 \arctan t - t \quad (0 \leq t \leq \sqrt{3})$$

باشد.

حل. با استفاده از (۲)، داریم

$$\begin{aligned} \int_C ye^{-x} ds &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2 \arctan t - t}{t^2 + 1} \sqrt{\left(\frac{2t}{t^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{2}{t^2 + 1} - 1\right)^2} dt \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2 \arctan t - t}{t^2 + 1} dt \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{3}} \arctan t d(\arctan t) - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{t^2 + 1} dt \\ &= \left[(\arctan t)^2 \right]_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \left[\ln(t^2 + 1) \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi^2}{9} - \ln 2. \end{aligned}$$

مثال ۲. انتگرال

$$\int_C xyz ds$$

را در صورتی بیابید که C منحنی فضایی

$$x = t, \quad y = \frac{4}{3}t^{3/2}, \quad z = t^2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

باشد.

حل. به کمک رابطه (۲)، داریم

$$\begin{aligned} \int_C xyz ds &= \frac{4}{3} \int_0^1 t^{9/2} \sqrt{1 + 4t + 4t^2} dt = \frac{4}{3} \int_0^1 t^{9/2} (1 + 2t) dt \\ &= \frac{4}{3} \left[\frac{2}{11} t^{11/2} + \frac{4}{13} t^{13/2} \right]_0^1 = \frac{280}{429}. \end{aligned}$$

کار به عنوان انتگرال خط. نوع دیگری از انتگرال خط در تعمیم مفهوم کار انجام شده به وسیله یک نیروی متغیر از حالت یک بعدی به حالت دو یا سه بعدی ظاهر می شود. ذره ای به جرم m در نظر می گیریم که در صفحه یا فضا حرکت کرده و مسیر C آن نمودار تابع بردار موضع

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

باشد، که در آن پارامتر t را زمان می گیریم. فرض کنیم C بیشتر از تعدادی متناهی خود قطعی نداشته، و هموار باشد بدین معنی که $\mathbf{r}(t)$ بر $[a, b]$ مشتق $d\mathbf{r}/dt$ ناصفر پیوسته داشته باشد.

(با اینحال ، همانند تبصره^۶ صفحه ۱۰۸۰ ، امکان می دهیم که در نقاط انتهایی $t = a$ و $t = b$ داشته باشیم $\frac{dr}{dt} = 0$. سرعت ذره در لحظه^۶ t مساوی است با

$$v = v(t) = \frac{dr(t)}{dt}$$

فرض کنیم بر ذره نیروی $F = F(r)$ وارد شده باشد ، که در آن $F(r)$ یک تابع برداری از بردار موضع r است ، یا معادلا " ، یک تابع مانند $F(x, y)$ یا $F(x, y, z)$ از مختصات نقطه با بردار موضع r می باشد ؛ چنین تابع یک میدان برداری نام دارد ، که در این حالت یک میدان نیرو می باشد . لذا ، در صفحه داریم

$$F = P_i + Q_j$$

که در آن $P = P(x, y)$ و $Q = Q(x, y)$ مؤلفه های F بوده و هر دو توابعی اسکالر از دو متغیرند ، ولی در فضا داریم

$$F = P_i + Q_j + R_k$$

که در آن مؤلفه های $P = P(x, y, z)$ ، $Q = Q(x, y, z)$ ، و $R = R(x, y, z)$ از توابع اسکالری از سه متغیر می باشند . فرض کنیم $F(r)$ بر مجموعه^۶ D پیوسته باشد به این معنی که مؤلفه های $F(r)$ بر D پیوسته باشند .

بنابر قانون دوم حرکت نیوتن ،

$$(۳) \quad m \frac{dv}{dt} = F$$

با ضرب نقطه ای (۳) در $v = dr/dt$ ، معلوم می شود که

$$m \frac{dv}{dt} \cdot v = F \cdot \frac{dr}{dt}$$

یا معادلا " ، برحسب تندى $v = v(t) = |v(t)|$ ذره ،

$$(۴) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = F \cdot \frac{dr}{dt}$$

زیرا

$$\frac{d}{dt} (v^2) = \frac{d}{dt} (v \cdot v) = 2v \cdot \frac{dv}{dt}$$

با انتگرالگیری از (۴) نسبت به t از a تا b ، به دست می آوریم

$$\left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_a^b = \int_a^b F \cdot \frac{dr}{dt} dt$$

یعنی ،

$$(۵) \quad \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt,$$

که در آن $v_B = v(b)$ و $v_A = v(a)$ کمیت

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

همانند صفحه ۴۲۹، انرژی جنبشی نام دارد. لذا، معادله (۵) می‌گوید که، به خاطر عمل نیروی \mathbf{F} ، انرژی جنبشی ذره به اندازه

$$(۶) \quad W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$$

تغییر می‌کند، که کار انجام شده توسط نیرو وقتی ذره مسیر C را از نقطه شروع A به بردار موضع $\mathbf{r}(a)$ تا نقطه پایان B به بردار موضع $\mathbf{r}(b)$ می‌پیماید نام دارد.

حال دو نوع انتگرال خط داریم، یکی انتگرالهای (۱) و (۱')، که هر دو را می‌توان به شکل $\int_C \mathbf{f} ds$ نوشت، که در آن $\mathbf{f} = f(\mathbf{r})$ یک تابع اسکالر (از شناسه برداری) است، و انتگرالهای سمت راست (۵) و (۶)، که می‌توان آنها را به شکل

$$(۷) \quad \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

نوشت، و شامل میدان برداری پیوسته $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ است، که در حالت کلی لازم نیست نیرو باشد. انتگرال (۷)، که اختصاری برای

$$(۸) \quad \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} dt$$

است، انتگرال خط \mathbf{F} در امتداد C نام دارد، ولی انتگرالگیری در آن به جای طول قوس s مثل حالت $\int_C \mathbf{f} ds$ نسبت به بردار موضع \mathbf{r} است. دیفرانسیل $d\mathbf{r}$ تابع برداری $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ مثل تابع اسکالر تعریف می‌شود. لذا،

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt,$$

در نتیجه، در صفحه،

$$d\mathbf{r} = d(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}\right) dt = \left(\frac{dx}{dt} dt\right)\mathbf{i} + \left(\frac{dy}{dt} dt\right)\mathbf{j} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$$

و در فضا، $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ ، فرمولهای (۵) و (۶) برحسب انتگرال خط (۷) به صورت زیر درمی آیند:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

و

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

به آسانی معلوم می شود که تمام عبارات مربوط به کار W که در بخشهای قبل آمده اند حالات خاصی از فرمول اخیر می باشند.

انتگرالهای خط نسبت به مختصات. با گذاردن عبارات $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ و $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ در (۷)، در صفحه داریم

$$(۹) \quad \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P dx + Q dy$$

زیرا $(P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = P dx + Q dy$ ، و در فضا خواهیم داشت

$$(۹') \quad \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P dx + Q dy + R dz$$

طرفهای راست (۹) و (۹') نیز انتگرالهای خط در امتداد C نام دارند. شاید نوشتن این انتگرالها به صورت

$$\int_C (P dx + Q dy), \quad \int_C (P dx + Q dy + R dz)$$

ابهام کمتری داشته باشد، ولی استفاده از پرانتز اطراف "فرمهای دیفرانسیل" $P dx + Q dy$ و $P dx + Q dy + R dz$ مرسوم نیست.

برای محاسبه^۶ (۹) و (۹')، رابطه^۸ را به صورت باز می نویسیم، در صفحه به دست می آوریم

$$(۱۰) \quad \int_C P dx + Q dy = \int_a^b P(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} dt + \int_a^b Q(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} dt$$

و در فضا خواهیم داشت

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = \int_a^b P(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} dt + \int_a^b Q(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} dt + \int_a^b R(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt} dt \quad (10')$$

جملات این مجموع را به صورت فشرده‌تر

$$\int_C P dx, \quad \int_C Q dy, \quad \int_C R dz$$

نشان داده و آنها را نیز انتگرال خط می‌نامیم، البته این بار نسبت به مختصات x ، y و z . لذا، فرمولهای (۱۰) و (۱۰') با این نماد اختصاری به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\int_C P dx + Q dy = \int_C P dx + \int_C Q dy$$

و

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = \int_C P dx + \int_C Q dy + \int_C R dz.$$

درحالتی که C نمودار تابع پیوسته‌ای چون

$$y = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

است، می‌توان در فرمول (۱۰) x را پارامتر گرفت، که در این صورت داریم

$$\int_C P dx + Q dy = \int_a^b P(x, f(x)) dx + \int_a^b Q(x, f(x)) f'(x) dx. \quad (11)$$

به همین نحو، هرگاه C نمودار تابع پیوسته‌ای به شکل

$$x = g(y) \quad (a \leq y \leq b)$$

باشد، آنگاه

$$\int_C P dx + Q dy = \int_a^b P(g(y), y) g'(y) dy + \int_a^b Q(g(y), y) dy. \quad (11')$$

فرض کنیم $s = s(t)$ تابع طول قوس C باشد؛ یعنی، طول قوس منحنی C از نقطه شروع

C تا نقطه بردار موضع $\mathbf{r}(t)$. در این صورت، C علاوه بر اینکه نمودار $\mathbf{r}(t)$ ($a \leq t \leq b$)

است نمودار $\mathbf{r}(s)$ ($0 \leq s \leq L$) نیز هست، که در آن L طول C و $\mathbf{r}(s)$ تابع مرکب $\mathbf{r}(t(s))$

شامل معکوس $t = t(s)$ تابع $s = s(t)$ می‌باشد. لذا، به کمک قاعده زنجیره‌ای،

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_0^L \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} ds = \int_0^L \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} ds. \quad (12)$$

اما، همانطور که از صفحات ۸۲ و ۱۱۷۹ می دانیم، $d\mathbf{r}/ds = \mathbf{T}$ ، که در آن \mathbf{T} بردار بیکه مماس در امتداد C است. لذا، انتگرال خط $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ نمایش دیگری چون

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$$

دارد، که از آن معلوم می شود که کار نیروی \mathbf{F} بر یک ذره متحرک در امتداد C کلاً از مؤلفه مماسی اش، یعنی مؤلفه در امتداد بردار \mathbf{T} ، ناشی می شود.

همین استدلالی که هم اکنون برای اثبات فرمول (۱۲) به کار رفت نشان می دهد که مقدار انتگرال خط $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ از نمایش پارامتری C مستقل است مشروط بر اینکه جهت C حفظ گردد. در واقع، هرگاه منحنی جهتدار C نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ باشد، آنگاه C نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(\tau))$ که در آن $t = t(\tau)$ تابع به طور پیوسته مشتق پذیری است که $t(\alpha) = a$ ، $t(\beta) = b$ ، و $dt/d\tau$ بر $[\alpha, \beta]$ مثبت است، نیز می باشد. اما، در این صورت،

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{d\tau} d\tau = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} d\tau,$$

که حکم با حروف شکسته را ثابت می کند.

اگر جهت C عکس شود، وضع فرق خواهد کرد. فرض کنیم C - منحنی حاصل از عکس کردن جهت C باشد، مثل شکل ۱. در این صورت، C - نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(\tau))$ است، که در آن



شکل ۱

$t = t(\tau)$ تابع به طور پیوسته مشتق پذیری است که $t(\beta) = a$ ، $t(\alpha) = b$ ، و $dt/d\tau$ بر $[\alpha, \beta]$ منفی است. بنابراین،

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} d\tau = \int_b^a \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} dt = \int_b^a \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = - \int_a^b \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt,$$

در نتیجه،

$$(۱۳) \quad \int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

هرگاه C دارای نقطه شروع A و نقطه پایان B باشد، آنگاه C - دارای نقطه شروع B و نقطه

پایان A می‌باشد (ر.ک. شکل) ، و (۱۳) را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$(۱۳) \quad \int_{BA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

البته با این فرض که AB یعنی قوس با شروع A و پایان B ، و BA یعنی همان قوس که در جهت خلاف پیموده شده است . به عنوان تمرین ، نشان دهید که مقدار انتگرال خط $\int_C f(\mathbf{r}) ds$ ، از نوع (۱) یا (۱') ، در صورت عکس‌کردن جهت C تغییر نمی‌کند . در مثالهای زیر ، انتگرالهای خط از نوع (۷) تا (۱۱) محاسبه شده‌اند .

مثال ۳ . انتگرال

$$I = \int_C 3y dx + x dy$$

را در صورتی حساب کنید که C نیم‌دایره^۶ $x = \cos t$, $y = \sin t$ ($0 \leq t \leq \pi$) باشد .

حل . با استفاده از فرمول (۱۰) ، داریم

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi 3 \sin t (-\sin t) dt + \int_0^\pi \cos t (\cos t) dt \\ &= -3 \int_0^\pi \sin^2 t dt + \int_0^\pi \cos^2 t dt = -\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = -\pi. \end{aligned}$$

مثال ۴ . انتگرال

$$I = \int_C yz dx + xz dy + xy dz$$

را در صورتی حساب کنید که C مکعبی پیچ خورده^۶

$$x = t, y = t^2, z = t^3 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

باشد .

حل . این بار از فرمول (۱۰') استفاده کرده ، به دست می‌آوریم

$$I = \int_0^1 t^3 dt + \int_0^1 t^4 (2t) dt + \int_0^1 t^3 (3t^2) dt = \int_0^1 6t^5 dt = 1.$$

مثال زیر نشان می‌دهد که ، در حالت کلی ، مقادیر یک انتگرال خط در امتداد

منحنیهای مختلف با نقاط انتهایی یکسان متفاوتند.

مثال ۵. انتگرال خط

$$(۱۴) \quad I = \int_C xy \, dx + (y - x) \, dy$$

را در امتداد هر یک از منحنیهای زیر بین نقاط $(0, 0)$ و $(1, 1)$ حساب کنید:

(آ) خط $y = x$ ؛

(ب) سهمی $y = x^2$ ؛

(پ) سهمی $y^2 = x$ ؛

(ت) منحنی $y = x^3$.

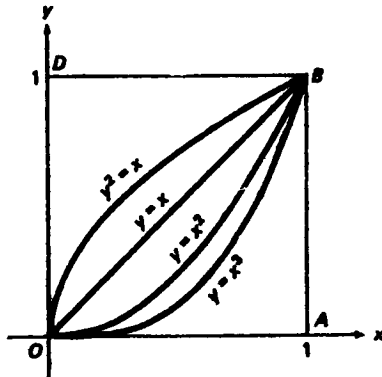
حل. چهار منحنی در شکل ۲ نموده شده‌اند. با استفاده از فرمول (۱۱) و محاسباتی ساده، خواهیم داشت

$$: I = \int_0^1 [x^2 + (x - x)] \, dx = \frac{1}{3} \quad (آ)$$

$$: I = \int_0^1 [x^3 + 2(x^2 - x)x] \, dx = \frac{1}{12} \quad (ب)$$

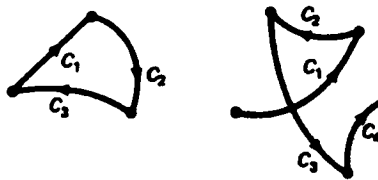
$$: I = \int_0^1 \left[x^{3/2} + \frac{1}{2}(x^{1/2} - x)x^{-1/2} \right] \, dx = \frac{17}{30} \quad (پ)$$

$$. I = \int_0^1 [x^4 + 3(x^3 - x)x^2] \, dx = -\frac{1}{20} \quad (ت)$$



شکل ۲

منحنیهای قطعه قطعه هموار. فرض کنیم منحنی C از تعدادی متناهی منحنی هموار C_1, C_2, \dots, C_n انتها به انتها، مانند شکل ۳، تشکیل شده باشد. این نوع منحنی را قطعه قطعه هموار گوئیم، و می تواند در نقاط اتصال " گوشه داشته باشد. انتگرال خط $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$



منحنیهای قطعه قطعه هموار

شکل ۳

در امتداد منحنی قطعه قطعه هموار C با فرمول زیر تعریف می شود:

$$(15) \quad \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \dots + \int_{C_n} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

البته (همانطور که به آسانی تحقیق می شود) ، این فرمول برای منحنی هموار C که به n قوس C_1, C_2, \dots, C_n تقسیم شده است خود به خود برقرار است .

مثال ۶. انتگرال خط (۱۴) را در امتداد مسیره های چندضلعی OAB و ODB حساب کنید که در آنها، مثل شکل ۲، $O = (0, 0)$ ، $A = (1, 0)$ ، $B = (1, 1)$ ، و $D = (0, 1)$.

حل. مسیره های OAB و ODB قطعه قطعه هموازند. در واقع، OAB از پاره خطهای OA و AB تشکیل شده است، حال آنکه ODB از پاره خطهای OD و DB متشکل است. این پاره خطها به نمایشهای پارامتری زیر می باشند:

$$OA: \quad x = t, \quad y = 0 \quad (0 \leq t \leq 1),$$

$$AB: \quad x = 1, \quad y = t \quad (0 \leq t \leq 1),$$

$$OD: \quad x = 0, \quad y = t \quad (0 \leq t \leq 1),$$

$$DB: \quad x = t, \quad y = 1 \quad (0 \leq t \leq 1).$$

بنابراین، به کمک (۱۵) داریم

$$\begin{aligned} \int_{OAB} xy dx + (y-x) dy &= \int_{OA} xy dx + (y-x) dy + \int_{AB} xy dx + (y-x) dy \\ &= \int_0^1 0 dt + \int_0^1 (t-1) dt = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\int_{ODB} xy dx + (y-x) dy = \int_{OB} xy dx + (y-x) dy + \int_{DB} xy dx + (y-x) dy$$

$$= \int_0^1 t dt + \int_0^1 t dt = 1$$

(توجه کنید که بر AB و OD ، $dx = 0$ ، حال آنکه بر OA و DB ، $dy = 0$) . به عنوان تمرین ، از فرمولهای (۱۱) و (۱۱') استفاده کرده همین انتگرالها را محاسبه نمایید .

مثال ۷. انتگرال خط

$$I = \int_C y^2 dx + 2xy dy$$

را در امتداد منحنیهای مثال ۵ حساب کنید .

حل . محاسبات مستقیم نشان می دهند که

$$I = \int_0^1 (x^2 + 2x^2) dx = 1 \quad (A)$$

$$I = \int_0^1 (x^4 + 4x^4) dx = 1 \quad (B)$$

$$I = \int_0^1 (x + x) dx = 1 \quad (C)$$

$$I = \int_0^1 (x^6 + 6x^6) dx = 1 \quad (D)$$

توجه کنید که ، برخلاف مثال ۵ ، مقادیر I در مثال ۷ همه یکسانند . در مثال ۱ بخش آینده دلایش را نشان خواهیم داد .

مسائل

انتگرال خط داده شده از نوع $\int_C f(r) ds$ را حساب کنید .

(۱) $\int_C (x+y) ds$ ، که در آن C پاره خط از $(0,0)$ تا $(3,4)$ است

(۲) $\int_C (x-y) ds$ ، که در آن C پاره خط از $(1,2)$ تا $(5,-2)$ است

۳) که در آن C پاره خط از $(0, -3)$ تا $(6, 0)$ است ، $\int_C \frac{ds}{x-y}$

۴) که در آن C قوس سهموی $x = 2t, y = t^2$ ($0 \leq t \leq 1$) است ، $\int_C xy \, ds$

۵) که در آن C مستطیل به رئوس $(0, 0), (2, 0), (2, 3), (0, 3)$ است که یکبار در

جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است

۶) که در آن C منحنی $x = 3t^2, y = 2t^3$ ($1 \leq t \leq 2$) است ، $\int_C \frac{y}{\sqrt{x}} \, ds$

۷) که در آن C دایره $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) است ، $\int_C (x^2 + y^2)^2 \, ds$

۸) که در آن C قوس مارپیچی $x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = 4t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) است ، $\int_C \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, ds$

است

۹) که در آن C قوس مستدیر $x = \cos t, y = \sin t, z = 1$ ($0 \leq t \leq \pi/2$) است ، $\int_C xyz \, ds$

۱۰) که در آن C منحنی $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t$ ($0 \leq t \leq \sqrt{2}$) است ، $\int_C (2\sqrt{x^2 + y^2} - z) \, ds$

است

۱۱) که در آن C فصل مشترک صفحه $y = x$ و کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ در $\int_C (x + y + z) \, ds$

یکپشت اول است که از $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ تا $(0, 0, 2)$ پیموده شده است .

۱۲) نشان دهید که انتگرال خط $\int_C f(x, y) \, ds$ در امتداد منحنی C به معادله قطبی

$r = r(\theta)$ مساوی است با

$$\int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

۱۳) با استفاده از مسئله قبل ، $\int_C (x - y) \, ds$ را در صورتی حساب کنید که C دایره $x^2 + y^2 = 2x$

باشد که یکبار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است .

۱۴) فرض کنید بر یک ذره متحرک به سرعت v نیروی \mathbf{F} وارد است که همواره بر v عمود

می‌باشد . نشان دهید کار انجام شده توسط \mathbf{F} بر ذره صفر است .

۱۵) کار نیروی $\mathbf{F} = 3x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ وارد بر یک ذره متحرک در امتداد قوس سهموی $y = 4x^2$

از $(0, 0)$ تا $(1, 4)$ را بیابید .

۱۶) کار نیروی $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} - xy^2\mathbf{j}$ وارد بر ذره متحرکی که یکبار مربع C محدود به خطوط

$x = \pm 1$ و $y = \pm 1$ را می‌پیماید بیایید .

۱۷ . یک تعمیرکار به وزن 150-lb که کیسه‌ای سیمان به وزن 25-lb را حمل می‌کند از یک پلکان مارپیچ حول یک سیلوی استوانه‌ای به شعاع 10 ft بالا می‌رود . ارتفاع سیلو 60 ft بوده و پلکان دقیقاً " سه دور کامل دور سیلو می‌زند . تعمیرکار با بالارفتن از پلکان چه مقدار کار انجام داده است ؟

۱۸ . در مسئله ۱۷ قبل ، اگر کیسه سوراخ بوده و ضمن بالارفتن 12 lb سیمان تدریجاً " بریزد ، کار انجام شده چقدر است ؟

انتگرال خط داده شده از نوع $\int_C P dx + Q dy + R dz$ یا $\int_C P dx + Q dy$ را حساب کنید .

۱۹ . $\int_C x dy$ ، که در آن C پاره‌خط از $(0, 0)$ تا $(2, -3)$ است

۲۰ . $\int_C y dx$ ، که در آن C پاره‌خط از $(2, 6)$ تا $(7, 1)$ است

۲۱ . $\int_C x dy - y dx$ ، که در آن C پاره‌خط از $(a, 0)$ تا $(0, b)$ است

۲۲ . $\int_C \sin x dy - \cos y dx$ ، که در آن C پاره‌خط از $(0, 0)$ تا $(\pi/3, \pi/6)$ است

۲۳ . $\int_C (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$ ، که در آن C قوس مستدیر $x = \cos t, y = \sin t$ ($0 \leq t \leq \pi/2$) است

است

۲۴ . $\int_C \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2}$ ، که در آن C نیم‌دایره $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t$ ($0 \leq t \leq \pi$) است

است

۲۵ . $\int_C (x+y)dx + (x-y)dy$ ، که در آن C بیضی $x = \sin t, y = 2 \cos t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) است

است

۲۶ . $\int_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$ ، که در آن C مربع به رئوس $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$ و $(0, -1)$ است که

یکبار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است

۲۷ . $\int_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + xy + y^2}$ ، که در آن C دایره $x = a \cos t, y = a \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi, a > 0$) است

است

۲۸. $\int_C xy dx + x^2 dy$ ، که در آن C منحنی بستهء محدود به سهمیهای $y = x$ و $y^2 = x$

است که یکبار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است

۲۹. $\int_C x dx + (x - y) dy + (x + y + z) dz$ ، که در آن C پاره‌خط از $(1, 0, -1)$ تا $(2, 3, 4)$

است

۳۰. $\int_C (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$ ، که در آن C همان قوس مارپیچ مسئلهء ۸

است

۳۱. $\int_C e^x dx + e^y dy + e^z dz$ ، که در آن C همان مکعبی پیچ خوردهء مثال ۴ است

انتگرال $\int_C (x^2 + y) dx + (y^2 - x) dy$ را در امتداد مسیر داده شده از نقطهء $(0, 0)$ تا $(1, 2)$

حساب کنید.

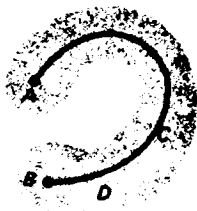
۳۲. پاره‌خط از $(0, 0)$ تا $(1, 2)$

۳۳. مسیر چندضلعی از $(0, 0)$ تا $(1, 0)$ و سپس از $(1, 0)$ تا $(1, 2)$

۳۴. قوس سهمی $y = 2x^2$ ($0 \leq x \leq 1$)

۱۵. ۲. استقلال از مسیر و میدانهای گرادینان

قلمروها و مسیره‌ها. فرض کنیم D مجموعه‌ای از نقاط در صفحه یا فضا بوده، و به ازای هر جفت از نقاط A و B در D یک منحنی مانند C با نقطهء شروع A و نقطهء پایان B موجود باشد که کاملاً در D قرار گیرد. در این صورت، گوییم D همبند (قوسوار) است. یک مجموعهء همبند باز را قلمرو می‌نامیم (آن را با قلمرو تابع خلط نکنید). مثلاً، شکل ۴ یک قلمرو دویعدی D را با دو نقطهء A و B آن نشان می‌دهد که با منحنی C که کاملاً در D است به هم وصل شده‌اند. توجه کنید که چون قلمرو D باز است، شامل مرز خود نیست.



شکل ۴

منظور از یک منحنی بسته ساده یعنی نمودار یک تابع برداری پیوسته مانند $r = r(t)$ ($a \leq t \leq b$) در صفحه یا فضا با نقاط انتهایی منطبق بر هم یعنی $r(a) = r(b)$ ، ولی بدون خود قطعی دیگر (صفحه ۷۳۸ را به یاد آورید). ناحیه دوبعدی D را همبند ساده گوئیم اگر به ازای هر منحنی بسته ساده C واقع در D ، ناحیه مرکب از C و درونش نیز در D جا داشته باشند. در غیر این صورت، قلمرو را همبند چندگانه می‌نامیم. مثلاً، قلمرو شکل ۴ همبند ساده است، زیرا درون هر منحنی بسته ساده واقع در D فقط از نقاط متعلق به D تشکیل شده است؛ این صرفاً "بدان خاطر است که D سوراخ ندارد. از آن سو، قلمرو E شکل ۵، که سوراخدار است، همبند چندگانه است، زیرا درون هر منحنی بسته ساده در E اطراف سوراخ نقاطی را شامل است که تعلق به E ندارد.



شکل ۵

به ازای دو نقطه A و B ، یک مسیر از A به B یعنی منحنی قطعه قطعه همواری مانند C با نقطه شروع A و نقطه پایان B (که بیش از تعدادی متناهی خود قطعی نداشته باشد)، به طور کلی، مقدار انتگرال خط $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ در امتداد مسیر C از نقطه A به نقطه B نه فقط به A و B وابسته است بلکه به مسیر خاصی از A به B نیز بستگی دارد. مثلاً، این امر در مثال ۵، صفحه ۴۳۸، صحت دارد. لیکن، حالات بسیاری وجود دارند که در آنها انتگرال خط مستقل از مسیر است، بدین معنی که مقدارش فقط تابع نقاط انتهایی C بوده و به خود مسیر C بستگی ندارد. همانطور که در قضیه زیر نشان داده‌ایم، شرط لازم و کافی برای آنکه انتگرال خط $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ بر روی قلمرو D از مسیر مستقل باشد آن است که انتگرالده \mathbf{F} یک میدان گرادین باشد، بدین معنی که تابع اسکالر مستقیماً $U = U(x, y)$ چون U تعریف شده بر D موجود باشد که \mathbf{F} گرادین آن باشد؛ یعنی، $\mathbf{F} = \text{grad } U = \nabla U$. قضیه برای میدان دو بعدی \mathbf{F} بیان نده است، لیکن به آسانی می‌توان آن را به \mathbf{F} سه بعدی تعمیم داد.

قضیه ۱ (انتگرالهای خط مستقل از مسیر و میدانهای گرادین). فرض کنیم میدان برداری $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ بر قلمرو D پیوسته باشد. در این صورت، انتگرال خط

$U = U(x, y)$ چون تابعی است اگر و فقط اگر $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P dx + Q dy$ بر D مستقل از مسیر است اگر و فقط اگر تابعی چون $U = U(x, y)$ تعریف شده بر D موجود باشد به طوری که $\mathbf{F} = \text{grad } U$ یا معادله

$$(1) \quad P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

برهان. ابتدا فرض کنیم $\mathbf{F} = \text{grad } U$ ، C را یک منحنی هموار در D از A به B به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

می‌گیریم. از رابطه (۱) داریم

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C P dx + Q dy = \int_a^b P(x(t), y(t)) x'(t) dt + \int_a^b Q(x(t), y(t)) y'(t) dt \\ &= \int_a^b [U_x(x(t), y(t)) x'(t) + U_y(x(t), y(t)) y'(t)] dt, \end{aligned}$$

که در آن $U_x = \partial U / \partial x$ و $U_y = \partial U / \partial y$ ، و بریم مشتقگیری نسبت به t را نشان می‌دهد. با اعمال قاعده زنجیره‌ای، و به کمک قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، خواهیم داشت

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \frac{d}{dt} [U(x(t), y(t))] dt = U(x(b), y(b)) - U(x(a), y(a)),$$

این را می‌توان به طور فشرده‌تر زیر نوشت:

$$(2) \quad \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(B) - U(A),$$

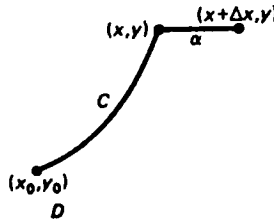
که در آن $U(A)$ و $U(B)$ مقادیر U در $A = (x(a), y(a))$ و $B = (x(b), y(b))$ اند. اگر C فقط قطعه قطعه هموار باشد، همین نتیجه پس از تقسیم C به قوسهای هموار به دست می‌آید (شرح مطلب را به عنوان تمرین می‌گذاریم). چون عبارت $U(B) - U(A)$ از مسیر مستقل است، همین امر در مورد خود انتگرال خط $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ درست خواهد بود.

به عکس، فرض کنیم $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ مستقل از مسیر باشد. همچنین، (x_0, y_0) نقطه ثابتی از D و (x, y) نقطه متغیری از D بوده، و $U = U(x, y)$ تابع اسکالر تعریف شده با انتگرال خط

$$(3) \quad U = \int_C P dx + Q dy$$

باشد، که در آن C مسیری دلخواه از (x_0, y_0) به (x, y) است. توجه کنید که این تعریف فقط

به خاطر این معنی دارد که انتگرال (۳) از مسیر مستقل است. حال y را ثابت گرفته و به x نمو Δx می دهیم، $|\Delta x|$ را آنقدر کوچک می گیریم که، مثل شکل ۶، پاره خط افقی α از (x, y)



شکل ۶

تا $(x + \Delta x, y)$ داخل D قرار گیرد (این همیشه امکان دارد، زیرا D یک مجموعه باز است). در این صورت،

$$U(x + \Delta x, y) = \int_{C+\alpha} P dx + Q dy = \int_C P dx + Q dy + \int_\alpha P dx + Q dy,$$

که در آن $C + \alpha$ مسیر حاصل از اتصال نقطه شروع α به نقطه پایان C است. با استفاده از (۳) و اینکه در امتداد α ، $dy = 0$ ، خواهیم داشت

$$U(x + \Delta x, y) - U(x, y) = \int_\alpha P dx + Q dy = \int_\alpha P dx.$$

اما

$$\int_\alpha P dx = \int_x^{x+\Delta x} P(t, y) dt \quad (y \text{ ثابت})$$

و در نتیجه، بنابر قضیه مقدار میانگین برای انتگرالهای معمولی،

$$U(x + \Delta x, y) - U(x, y) = P(u, y) \Delta x \quad (x \leq u \leq x + \Delta x),$$

که در آن وقتی $\Delta x \rightarrow 0$ ، $u \rightarrow x$. بنابراین، طبق پیوستگی P

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(x + \Delta x, y) - U(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(u, y) = P(x, y),$$

و استدلالی مشابه مستلزم پاره خط قائم از (x, y) تا $(x, y + \Delta y)$ نشان می دهد که

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y).$$

انتگرالهای خط و سطح ۱۴۴۷

لذا، $\mathbf{F} = \text{grad } U$ ، که در آن U تابعی است که با انتگرال خط مستقل از مسیر تعریف شده است.

قضیهٔ اساسی انتگرالهای خط. انتگرال خط مستقل از مسیر $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ تنها به نقاط انتهایی A و B مسیر C بستگی دارد. و لذا، گاهی به شکل $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ نوشته می‌شود (البته، اگر انتگرال خط تابع مسیر باشد، این نماد نامناسب خواهد بود). لذا، فرمولهای (۲) و (۳) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$(۴) \quad \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(B) - U(A)$$

و

$$U = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy.$$

فرمول (۴)، یا معادلش

$$\int_A^B \nabla U \cdot d\mathbf{r} = U(B) - U(A)$$

($\nabla U = \text{grad } U$) مشابه چند متغیرهٔ قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال است، و به این دلیل گاهی قضیهٔ اساسی انتگرالهای خط نامیده می‌شود.

تبصره. اگر قرار دهیم

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

و

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P dx + Q dy + R dz$$

قضیهٔ ۱ برقرار می‌ماند

در اینجا طبعاً "به جای (۱) داریم

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z},$$

که یک فرمول بیشتر دارد.

مثال ۱. در مثال ۷، صفحه ۱۴۴۰، دریافتیم که انتگرال خط

$$I = \int_C y^2 dx + 2xy dy$$

در امتداد چهار مسیر مختلف از $(0, 0)$ تا $(1, 1)$ مقدار یکسان ۱ را دارد. حال، با استفاده از قضیه ۱، می‌توان حکم کرد که به ازای هر مسیر C از $(0, 0)$ تا $(1, 1)$ ، $I = 1$ ، زیرا $I = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ، که در آن $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ یک میدان گرادیان (روی تمام صفحه xy) است. در واقع، لحظه‌ای تأمل معلوم می‌سازد که \mathbf{F} گرادیان تابع

$$U = U(x, y) = xy^2$$

بوده، و در این صورت فرمول (۲) نتیجه می‌دهد که

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(1, 1) - U(0, 0) = 1 - 0 = 1.$$

تشخیص میدان گرادیان معمولاً "آسان نیست، و ما بعداً" آزمونی مبتنی بر مولفه‌های \mathbf{F} را ثابت می‌کنیم که با آن می‌توان وجود یا عدم وجود تابع U که $\mathbf{F} = \text{grad } U$ را ثابت کرد. اگر تابع U موجود باشد، آن را می‌توان با محاسبه انتگرال خط (۳) به دست آورد.

مثال ۲. در مثال ۵، صفحه ۱۴۳۸، دیدیم که انتگرال خط

$$I = \int_C xy dx + (y - x) dy$$

از مسیر مستقل نیست، و این را با نشان دادن اینکه مقادیرش به ازای مسیرهای مختلف بین دو نقطه متفاوتند ثابت کردیم. مستقل از مسیر نبودن I را می‌توان، بدون محاسبه انتگرالهای خط، از قضیه ۱ نتیجه گرفت؛ زیرا فرض کنیم I مستقل از مسیر باشد. در این صورت، طبق قضیه ۱، تابعی چون U وجود دارد به طوری که

$$\frac{\partial U}{\partial x} = xy, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = y - x.$$

اما این ناممکن است، زیرا در این صورت

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -1, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = x,$$

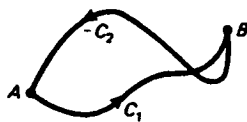
که با این امر مسلم که مشتقات جزئی دوم مخلوط $\partial^2 U / \partial x \partial y$ و $\partial^2 U / \partial y \partial x$ در صورت پیوستگی باید متدا " مساوی باشند در تضاد است (ر. ک. صفحه ۱۲۳۹).

فرض کنیم انتگرال خط $F = F(r)$ بر قلمرو D مستقل از مسیر باشد، یا معادلا "F بر D یک میدان گرادیان باشد. همچنین، C مسیر بسته‌ای در D باشد؛ یعنی، مسیری که نقاط انتهایی A و B آن یکی هستند. در این صورت، با گذاردن $A = B$ در فرمول (۲)، فوراً حاصل می‌شود که

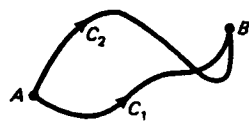
$$(۵) \quad \int_C F \cdot dr = 0.$$

به عکس، هرگاه (۵) به ازای هر مسیر بسته در D برقرار باشد، آنگاه انتگرال خط F بر D مستقل از مسیر است. برای مشاهده این امر، فرض کنیم C_1 و C_2 دو مسیر از A تا B ، مثل شکل γ (T)، باشند. در این صورت، مسیر C که از اتصال نقطه شروع C_2 به نقطه پایان C_1 ، مثل شکل γ (ب)، به دست می‌آید بسته است. بنابراین، طبق فرض،

$$\int_{C_1} F \cdot dr + \int_{-C_2} F \cdot dr = \int_C F \cdot dr = 0.$$



(ب)



(T)

شکل γ

پس نتیجه می‌شود که

$$\int_{C_1} F \cdot dr = - \int_{-C_2} F \cdot dr,$$

یا معادلا"، به کمک فرمول (۱۳)، صفحه ۱۴۳۶،

$$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_{C_2} F \cdot dr.$$

تنبصره. در واقع، می‌توان نشان داد که فرض برقراری (۵) به ازای هر مسیر بسته ساده^۳ C در قلمرو D استقلال از مسیر انتگرال خط F بر D را تضمین می‌کند (ر.ک. مسئله ۳۷).

گردش. اگر C یک مسیر بسته باشد، کمیت $\int_C F \cdot dr$ گردش F حول C نام دارد، و اغلب با

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

نموده می‌شود. در نماد \oint معمولاً "فرض می‌شود که مسیر C ساده بوده و خود قطعی جز نقاط انتهایی منطبق برهم ندارد. از قضیه ۱ و نکات فوق معلوم می‌شود که گردش یک میدان گرادیان حول هر مسیر بسته صفر است.

مثال ۳. گردش میدان

$$\mathbf{F} = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 \neq 0)$$

را حول دایره C به مرکز مبدا که یکبار خلاف جهت عقربه‌های ساعت پیموده شده است حساب کنید.

حل. میدان \mathbf{F} بر قلمرو همبند چندگانه D مرکب از تمام نقاط صفحه xy جز مبدا تعریف شده است. اگر دایره C به شعاع a باشد، دارای نمایش پارامتری $x = a \cos t, y = a \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) است. بنابراین،

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(-a \sin t)(-a \sin t) + (a \cos t)(a \cos t)}{(a \cos t)^2 + (a \sin t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

چون گردش حول C ناصفر است، نتیجه می‌شود که \mathbf{F} بر D میدان گرادیان نیست.

انرژی پتانسیل و بقای انرژی. تابع U قضیه ۱، بلکه قرین‌هاش، تعبیر فیزیکی مهمی دارد. میدان برداری \mathbf{F} را نیروی متغیری می‌گیریم که بر ذره‌ای به جرم m عمل می‌کند. همانطور که در صفحه ۱۴۳۴ دیدیم،

$$(۶) \quad \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

که در آن v_A تندی ذره در A و v_B تندی آن در B است. طرف راست (۶) کار W نیروی \mathbf{F} بر ذره ضمن حرکت در امتداد مسیر C از A و B بوده، و طرف چپ تغییر نظیر در انرژی

جنبشی ذره می باشد .

حال فرض کنیم \mathbf{F} یک میدان گرادیان باشد؛ یعنی، $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla U(\mathbf{r})$ ، بنا بر قضیه

(۱)

$$(۷) \quad \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(B) - U(A),$$

و از تلفیق (۶) و (۷) معلوم می شود که

$$(۸) \quad \frac{1}{2}mv_A^2 - U(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 - U(B).$$

برای تغییر علامت منهای (۸) به علامت به علاوه، تابع جدید $V(\mathbf{r}) = -U(\mathbf{r})$ به نام انرژی پتانسیل ذره یا پتانسیل میدان \mathbf{F} ، را معرفی می کنیم؛ در نتیجه، $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$ (چون گرادیان یک ثابت صفر است، U و V فقط با تقریب یک ثابت جمعی مثبت تعیین می شوند.) در این صورت، معادله (۸) خواهد شد

$$(۸') \quad \frac{1}{2}mv_A^2 + V(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 + V(B),$$

و می گوید که وقتی ذره در یک میدان گرادیان حرکت کند، مجموع انرژی جنبشی $\frac{1}{2}mv^2$ و انرژی پتانسیل V آن ثابت می ماند، یا به زبان فیزیک "حفظ می شود". این امر، که نقشی کلیدی در مکانیک نیوتنی دارد، قانون بقای انرژی نامیده شده و مقدار مشترک مجموعهای (۸') انرژی کل ذره نام دارد. در این وضع، میدانهای گرادیان، که به بقای انرژی منجر می شوند، نیز میدانهای بقا نامیده می شوند. معادله (۷) برحسب پتانسیل V به شکل زیر درمی آید:

$$(۷') \quad \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = V(A) - V(B),$$

و می گوید که مقدار کار W میدان بقای \mathbf{F} بر ذره متحرکی از A تا B به مسیر بین A و B وابسته نبوده، و مساوی کاهش V ، یا "افت پتانسیل" ضمن رفتن از A تا B است. یک میدان برداری را به طور پیوسته مشتق پذیر گوئیم اگر مشتقات جزئی اول مؤلفه هایش موجود و پیوسته باشند. قضیه زیر روابطی را توصیف می کند که باید برای مؤلفه های یک میدان گرادیان به طور پیوسته مشتق پذیر برقرار باشند.

قضیه ۲ (شرایط وارد بر مؤلفه های یک میدان گرادیان). فرض کنیم $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ ، یک میدان گرادیان به طور پیوسته مشتق پذیر بر قلمرو D با مؤلفه های $P = P(x, y, z)$ ،

، $Q = Q(x, y, z)$ و $R = R(x, y, z)$ باشد. در این صورت، در هر نقطه از D ،

$$(۹) \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

برهان. چون F یک میدان گرادیان است، تابعی مانند $U = U(x, y, z)$ تعریف شده بر D وجود دارد به طوری که

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}, \\ \frac{\partial R}{\partial y} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}, & \frac{\partial Q}{\partial z} &= \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}, \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}, & \frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}, \end{aligned}$$

که در آن پیوستگی هر مشتق جزئی اول سمت چپ پیوستگی مشتق جزئی دوم سمت راست را ایجاب می‌کند. اما، در این صورت، بنابر نکته بعد از مثال ۴، صفحه ۱۲۳۹،

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z},$$

و این فرمولها با (۹) معادل می‌باشند.

در حالت میدان گرادیان دوبعدی $F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ ، توابع P و Q فقط تابع x و y بوده، و مؤلفه z ، R وجود ندارد. در این صورت، معادلات (۹) به تنها شرط

$$(۹') \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

تحویل می‌شود.

لذا، عدم برقراری شرایط (۹)، یا شرط (۹') در حالت دوبعدی، به ما می‌گوید که F میدان گرادیان نیست. این امر سؤال زیر را مطرح می‌سازد: آیا برقراری (۹) یا (۹') بر قلمرو D میدان گرادیان بودن F بر D را تضمین می‌کند؟
با کمال تعجب، جواب منفی است، و این را مثال زیر نشان خواهد داد.

مثال ۴. فرض کنیم میدان $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ همانند مثال ۳ باشد. در این صورت،

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 \neq 0),$$

و \mathbf{F} بر قلمرو همبند چندگانه D مرکب از تمام نقاط صفحه xy جز مبدا^۶ تعریف شده است. با محاسبه مشتقات جزئی $\partial Q/\partial x$ و $\partial P/\partial y$ ، به آسانی معلوم می شود که

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

در نتیجه، شرط (۹') در هر نقطه از D برقرار است. با اینحال، همانطور که در مثال ۳ نشان دادیم، \mathbf{F} بر D میدان گرا دیان نیست.

آزمون میدان گرا دیان. چون قلمرو D مثال ۴ همبند چندگانه است، امکان آنکه شرط (۹') میدان گرا دیان بودن $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ را در صورت همبند ساده بودن D تضمین کند هنوز وجود دارد. همانطور که بعداً^۷ می بینیم، این امر صحت دارد (ر. ک. نتیجه^۲، صفحه^۶ ۱۴۸۳). در قضیه^۸ زیر نتیجه را فقط برای قلمرو مستطیلی، که البته قلمرو همبند ساده از نوع مقدماتی خاصی است، ثابت می کنیم. در مسئله^{۲۰} می بینید که این قضیه صورت سه بعدی نیز دارد.

قضیه^۳ (آزمون میدان گرا دیان بر قلمرو مستطیلی). فرض کنیم مؤلفه های $P = P(x, y)$ و $Q = Q(x, y)$ میدان برداری به طور پیوسته مشتق پذیر $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ در هر نقطه از قلمرو مستطیلی $D = \{(x, y): a < x < b, c < y < d\}$ در شرط

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

صدق نمایند. در این صورت، \mathbf{F} یک میدان گرا دیان بر D است؛ و در واقع، \mathbf{F} گرا دیان تابع

$$(10) \quad U = U(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt$$

است، که در آن (x_0, y_0) نقطه^۹ ثابتی از D و (x, y) نقطه^{۱۰} متغیری از D می باشد.

برهان. فرض کنیم $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ یک میدان گرا دیان بر D باشد. در این صورت، انتگرال

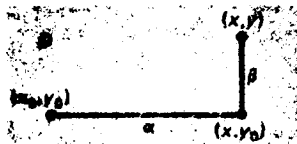
خط F بر D مستقل از مسیر است و، همانند برهان قضیه ۱، F گرادیان تابع زیر است:

$$U = \int_C P dx + Q dy,$$

که در آن C مسیری در D از نقطه ثابت (x_0, y_0) به نقطه متغیر (x, y) از D می‌باشد. مسیر C از پاره‌خط افقی α ی مرسوم از (x_0, y_0) به (x, y_0) و پس از آن پاره‌خط قائم β ی مرسوم از (x, y_0) تا (x, y) تشکیل شده است. همانطور که در شکل ۸ نشان دادیم، این مسیر، صرف نظر از انتخاب (x_0, y_0) و (x, y) ، همواره در قلمرو مستطیلی D قرار دارد. لذا،

$$U = \int_C P dx + Q dy = \int_\alpha P dx + Q dy + \int_\beta P dx + Q dy = \int_\alpha P dx + \int_\beta Q dy,$$

زیرا بر α $dy = 0$ و بر β $dx = 0$ ، و این بلافاصله فرمول (۱۰) را به ما می‌دهد، که در آن در هر دو انتگرال سمت راست که انتگرالهای معین عادی هستند از متغیر ظاهری انتگرالگیری t استفاده شده است (در انتگرالده دوم x ثابت گرفته شده است).



شکل ۸

فرمول (۱۰) با این فرض به دست آمد که F یک میدان گرادیان است، که ما در واقع سعی در اثبات آن داریم! اما اگر معلوم شود که گرادیان U مساوی F است، موفق به اثبات قضیه خواهیم شد. لذا، اینک به محاسبه مشتقات جزئی U می‌پردازیم. اولین انتگرال سمت راست (۱۰) مستقل از y است، ولی هر دو انتگرال تابع x می‌باشند. لذا، ابتدا از (۱۰) نسبت به y مشتق گرفته، به دست می‌آوریم

$$(11) \quad \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_0}^y Q(x, t) dt = Q(x, y)$$

(قضیه ۵، صفحه ۴۰۵). حال، با استفاده از مسئله ۵۱، صفحه ۱۳۴۰، از (۱۰) نسبت به x مشتق می‌گیریم. نتیجه خواهد شد

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^y Q(x, t) dt = P(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} dt.$$

اما، به خاطر شرط $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ و تغییر y به متغیر ظاهری t ،

$$\int_{y_0}^y \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} dt = \int_{y_0}^y \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} dt = P(x, y) - P(x, y_0).$$

از تلفیق دو معادله اخیر، معلوم می شود که

$$(11) \quad \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = P(x, y_0) + P(x, y) - P(x, y_0) = P(x, y),$$

که همراه با (۱۱) نشان می دهد که

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y},$$

یا معادلا " $F = \text{grad } U$.

مثال ۵. فرض کنیم

$$(12) \quad P(x, y) = \frac{1}{y}, \quad Q(x, y) = -\frac{x}{y^2} \quad (y \neq 0),$$

و $D = \{(x, y): a < x < b, c < y < d\}$ یک قلمرو مستطیلی باشد که نقطه‌ای از محور x (خط $y = 0$) را ندارد. در این صورت، چون

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

از قضیه ۳ نتیجه می شود که

$$F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} = \frac{y\mathbf{i} - x\mathbf{j}}{y^2}$$

یک میدان گرادیان بر D است. لذا، F یک میدان گرادیان بر نیمصفحه $y > 0$ است، که می توان آن را قلمرو مستطیلی بی کران $D = \{(x, y): -\infty < x < \infty, 0 < y < \infty\}$ گرفت، و بر نیمصفحه پایینی $y < 0$ نیز چنین می باشد.

ممکن است دریافته باشید که F گرادیان تابع $U(x, y) = x/y$ است، ولی اگر متوجه نشده‌اید، می توانید $U(x, y)$ را با استفاده از فرمول (۱۰) بسازید. در واقع، با گذاردن (۱۲) در (۱۰) و انتخاب $x_0 = 0$ و $y_0 = 1$ ، به دست می آوریم

$$U(x, y) = \int_0^x dt - \int_1^y \frac{x}{t^2} dt = \frac{x}{y}.$$

اثر انتخاب مقادیر مختلف x_0 و y_0 صرفاً "معرفی ثابت انتگرالگیری است. مثلاً، انتخاب

$x_0 = y_0 = 1$ نتیجه می دهد که

$$U(x, y) = \int_1^x dt - \int_1^y \frac{x}{t^2} dt = \frac{x}{y} - 1.$$

لذا، شکل کلی $U(x, y)$ عبارت است از

$$U(x, y) = \frac{x}{y} + C,$$

که در آن C ثابت دلخواهی می باشد. رابطه $F = \text{grad } U$ را با محاسبه مستقیم امتحان کنید.

تابع $U(x, y)$ همان رابطه را با میدان برداری $F(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ دارد که پادمشتق $U(x, y)$ با تابع یک متغیره $F(x)$ داراست، و بخصوص $U(x, y)$ فقط با تقریب یک ثابت جمعی دلخواه تعریف شده است. تفاوت اساسی در این است که اگرچه هر تابع پیوسته بر یک بازه مانند $F(x)$ پادمشتق دارد، تنها بعضی از میدانهای به طور پیوسته مشتق پذیر بر یک قلمرو مستطیلی مانند $F(x, y)$ "مشتق" تابعی چون $U(x, y)$ اند، و این توابع آنهایی هستند که در "شرط انتگرال پذیری" $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ صدق می کنند.

مسائل

آیا میدان برداری $F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ با مؤلفه های $P = P(x, y)$ و $Q = Q(x, y)$ میدان گرادینان است؟ اگر چنین است، تابع U و قلمرو D را بیابید که بر آن $F = \text{grad } U$.

$P = e^x \sin y, Q = e^x \cos y$ (۱)

$P = x \ln y, Q = -x/y$ (۲)

$P = x^2 + y^2, Q = x^3 + 2xy$ (۳)

$P = x + \ln y, Q = (x/y) + \sin y$ (۴)

$P = -4x^3y^3 - 3y^2, Q = 3x^4y^2 - 6xy$ (۵)

$P = x^2 + xy^3, Q = x^2y^2 - 2y$ (۶)

$P = xe^y, Q = ye^x$ (۷)

$P = x \sin 2y, Q = x^2 \cos 2y$ (۸)

$P = y - (\sin^2 y)/x^2, Q = x + (\sin 2y)/x$ (۹)

$P = 2x \cos^2 y, Q = 2y - x^2 \sin 2y$ (۱۰)

تحقیق کنید که میدان نیروی $F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ بقا است، و سپس، با استفاده از فرمول (۷)،

کار W ی نیروی F وارد بر ذره متحرک از 4 تا B را حساب کنید .

$$F = yi + xj, A = (0, 1), B = (-3, 4) \quad (11)$$

$$F = xi + yj, A = (-1, 1), B = (2, 3) \quad (12)$$

$$F = (x + y)(i + j), A = (-13, 0), B = (5, 12) \quad (13)$$

$$F = (2x + 3y)i + (3x - 2y)j, A = (-4, 6), B = (1, -2) \quad (14)$$

$$F = [(x + y + 1)e^x - e^y]i + [e^x - (x + y + 1)e^y]j, A = (0, 0), B = (\ln 3, \ln 2) \quad (15)$$

$$F = (\sinh x + \cosh y)i + (x \sinh y + 2)j, A = (0, \ln 4), B = (\ln 2, 0) \quad (16)$$

۱۷. گردش میدان

$$F = \frac{-yi + xj}{x^2 + 4y^2} \quad (x^2 + y^2 \neq 0)$$

را حول دایره C به مرکز مبدا^۳ که یکبار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است حساب کنید .

۱۸. نشان دهید که قضیه^۳ در صورت تعویض فرمول (۱۰) با

$$U = U(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y)dt + \int_{y_0}^y Q(x_0, t)dt$$

برقرار می‌ماند .

۱۹. نیروی جاذبه^۳ ثقلی وارد بر ذره^۳ Q به جرم یک در نقطه به بردار موضع R از سوی ذره

P به جرم M در نقطه‌ای به بردار موضع R_1 مساوی است با $F = -(GM/r^2)u$ ، که در

آن G ثابت عمومی ثقل بوده ، $r = |R - R_1|$ ، $r = |r|$ ، و بردار u یکه از P_1 به Q

است . نشان دهید که ، برحسب پتانسیل ثقلی $U = GM/r$ (فیزیکدانان)

را پتانسیل ثقلی می‌نامند) ، $F = \text{grad } U$. به‌طور کلی ، نشان دهید هرگاه Q به‌وسیله

n ذره^۳ P_1, \dots, P_n به جرمهای M_1, \dots, M_n در نقاطی به بردارهای موضع R_1, \dots, R_n

جذب گردد ، آنگاه نیروی برآیند F وارد بر Q مجدداً " مساوی است با $F = \text{grad } U$

که در آن

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{GM_i}{r_i} \quad (r_i = |R - R_i|).$$

۲۰. صورت سه‌بعدی زیر از قضیه^۳ را ثابت کنید : فرض کنید مؤلفه‌های $P = P(x, y, z)$ ،

$Q = Q(x, y, z)$ و $R = R(x, y, z)$ میدان برداری به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر

به ازای هر نقطه از قلمرو مستطیلی

$$D = \{(x, y, z): a < x < b, c < y < d, A < z < B\}$$

در شرایط زیر صدق نمایند:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

در این صورت، F یک میدان گرادیان D است؛ و در واقع، F گرادیان تابع

$$U = U(x, y, z) \quad (\text{یک})$$

$$= \int_{x_0}^x P(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z R(x, y, t) dt$$

است، که در آن (x_0, y_0, z_0) نقطه ثابتی از D و (x, y, z) نقطه متغیری از D می باشد.

آیا میدان برداری $F = Pi + Qj + Rk$ با مؤلفه‌های داده شده $P = P(x, y, z)$ ، $Q = Q(x, y, z)$ و $R = R(x, y, z)$ میدان گرادیان است؟ در صورت بودن، تابع U و قلمرو D را طوری بیابید که بر آن $F = \text{grad } U$ (ر.ک. مسئله ۲۰ و، در صورت لزوم، از فرمول (یک) استفاده نمایید).

$$P = y + z, Q = x + z, R = x + y \quad (21)$$

$$P = y - z, Q = x - z, R = x - y \quad (22)$$

$$P = yz, Q = xz, R = xy \quad (23)$$

$$P = xyz, Q = \frac{1}{2}x^2z, R = \frac{1}{2}x^2y \quad (24)$$

$$P = 2xy, Q = \ln(1 + x^2), R = \ln(1 + z^2) \quad (25)$$

$$P = yz \cos xy, Q = xz \cos xy, R = \sin xy \quad (26)$$

$$P = \ln y - \cos 2z, Q = (x/y) + z, R = y + 2x \sin 2z \quad (27)$$

$$P = Q = R = 1/(x + y + z) \quad (28)$$

۲۹. اگر تابع مشتق‌پذیری چون $U = U(x, y)$ موجود باشد به طوری که $dU = P dx + Q dy$ ،

فرم دیفرانسیل $P dx + Q dy$ را دیفرانسیل کامل گویند. نشان دهید $P dx + Q dy$

دیفرانسیل کامل است اگر و فقط اگر $F = Pi + Qj$ یک میدان گرادیان باشد.

۳۰. نشان دهید که $(y + xy^2) dx - x dy$ دیفرانسیل کامل نیست، ولی با ضرب شدن در

"عامل انتگرالگیری" مناسبی چون $f(x, y)$ به این صورت درمی‌آید. $f(x, y)$ را با امتحان بیابید.

۳۱. یک راه‌آهن هوایی کودکان به ارتفاع 121 ft برده شده و سپس‌رها می‌شود. تندی

ماکریم آن در پایین‌ترین نقطه مسیر چقدر است؟ از مقاومت هوا و اصطکاک صرف

نظر کرده، از استدلال مربوط به تبدیل انرژی پتانسیل به انرژی جنبشی استفاده

نمایید. آیا جواب به وزن کل واگنها و مسافران بستگی دارد؟ شتاب ثقل g را

بگیرید. 32 ft/sec^2

۳۲. دو کودک در لبه بامی به ارتفاع h ft از زمین ایستاده‌اند. اولی سنگی را با تندی v_0 پایین می‌اندازد، و در همین زمان دومی سنگ دیگری را با تندی v_0 به بالا پرت می‌کند. نشان دهید که هر دو سنگ با تندی $v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ به زمین می‌خورند، منتها در زمانهای مختلف t_1 و t_2 . زمانهای t_1 و t_2 و نیز $\Delta t = t_2 - t_1$ را بیابید.

۳۳. انرژی پتانسیل V یک فنر کشیده شده را در صورتی بیابید که نیروی بازگردان الاستیک $F = -ks$ باشد، که در آن k ثابت فنر بوده و s انبساط طولی فنر نسبت به طول طبیعی‌اش باشد (صفحه ۴۳۱ را به یاد آورید). وقتی $s = 0$ ، V را صفر بگیرید.

۳۴. عنکبوتی به وسیله یک تار از سقف آویزان است. فرض کنید وزن عنکبوت طول طبیعی تار را دو برابر کرده، آن را از L به $2L$ تبدیل کند. عنکبوت برای رسیدن به سقف W کار انجام می‌دهد که با کار W_0 در صورت غیرالاستیک بودن تار به طول $2L$ صورت می‌گیرد متفاوت است. نشان دهید که $W = \frac{3}{2}W_0$.

۳۵. فرض کنید T کره جامد $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ به شعاع a بوده، و Q یک ذره به جرم یک در نقطه $(0, 0, Z)$ خارج T باشد. همچنین، T به چگالی ثابت δ بوده، و T را به "گوه‌های کروی" $T_i (i = 1, \dots, n)$ از نوع شکل ۵۳، صفحه ۱۴۱۷، افزایش دهید. سپس هر T_i را ذره‌ای مانند P_i به جرم M_i بگیرید، که M_i حاصل ضرب δ در حجم T_i است، و مسئله ۱۹ را به ازای فاصله r_i نقطه T_i تا Q اعمال کنید، و بالاخره اندازه ماکزیمم تمام T_i ها را به صفر نزدیک کرده، حد بگیرید تا معلوم شود که Q با نیروی $F = \text{grad } U$ جذب T می‌شود، که در آن پتانسیل ثقلی U با انتگرال

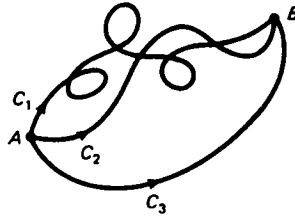
$$U = \iiint_T \frac{G\delta}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-Z)^2}} dV$$

داده می‌شود. U را حساب کرده، نشان دهید که کره جامد T نقطه P را با نیرویی جذب می‌کند که گویی تمام جرمش در مرکز آن متمرکز شده است. نشان دهید این نه فقط در مورد چگالی ثابت δ ، بلکه برای هر تابع چگالی به‌طور کروی متقارن

$$\delta = \delta(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

۳۶. نشان دهید که نیروی ثقلی خالص یک غشاء کروی همگن بر ذره‌ای در داخل آن صفر است.

۳۷. شکل ۹ دو مسیر C_1 و C_2 از A به B را نشان می‌دهد، که در آن C_1 و C_2 دوبار (در نقاطی غیر از A و B) متقاطع بوده، و C_1 سه خود قطعی دارد. فرض کنید فقط می‌دانیم که به ازای هر مسیر بسته ساده C (در قلمروی)، $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ ، با معرفی مسیر دیگر C_3 از A به B ، که C_1 یا C_2 را قطع نکند، نشان دهید که $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.



شکل ۹

۳.۱۵ مساحت سطح و انتگرالهای سطح

مساحت سطح. حال به انتگرالهای سطح رومی آوریم؛ یعنی، انتگرالها روی سطوحی که در حالت کلی خمیده‌اند. بحث را با مسئله تعیین مساحت نمودار یک تابع به طور پیوسته مشتقپذیر دو متغیره آغاز می‌کنیم. فرض کنیم سطح S نمودار تابع

$$z = f(x, y) \quad ((x, y) \in R)$$

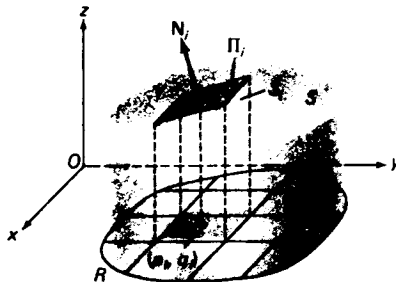
باشد، که در آن R یک ناحیه نرمال در صفحه xy است که در صفحه xy تعریف شد، و f تابع به طور پیوسته مشتقپذیر می‌باشد (یعنی، مشتقات جزئی $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ موجود و پیوسته‌اند). همانند تعریف انتگرال مضاعف روی R که در بخش ۱۰.۱۴ داده شد، R را با رسم خطوط

$$(1) \quad x = x_j \quad (j = 0, 1, \dots, J), \quad y = y_k \quad (k = 0, 1, \dots, K),$$

که در آنها

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{j-1} < x_j = b, \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_{k-1} < y_k = d,$$

و ناحیه مستطیلی $\{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ شامل ناحیه R است، به n زیر ناحیه R_1, R_2, \dots, R_n افراز می‌کنیم. صفحات با همان معادلات (۱) موازی صفحات yz و xz بوده، و S را به n "عناصر سطح" S_1, S_2, \dots, S_n مانند عنصر S_i در شکل ۱۰ برای حالت $f(x, y) \geq 0$ تقسیم می‌کنند.



شکل ۱۰

حال در هر زیر ناحیه R_i نقطه دلخواه (p_i, q_i) را اختیار کرده، و نقطه P_i بر S_i را طوری می‌یابیم که (p_i, q_i) تصویر آن در صفحه xy باشد. سپس در هر نقطه P_i صفحه مماس بر S را رسم می‌کنیم. این کار n صفحه مماس به ما می‌دهد که صفحات (۱) را در n ناحیه سطح $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ قطع می‌کنند که مانند توفالهای بام چسبیده به S می‌باشند؛ در شکل ناحیه Π_i برای یک عنصر سطح " درونی " S_i آمده است که تصویرش روی صفحه xy مستطیلی است. فرض کنید $\Delta\sigma_i$ مساحت Π_i باشد (علامت σ سیگمای کوچک یونانی است). در این صورت، گویی مجموع $\sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i$ تقریب مناسبی است به آنچه شهوداً " مساحت A_S سطح S برداشت می‌شود، و این تقریب وقتی اندازه هر عنصر سطح S_i کوچکتر شود، یعنی اندازه μ مش

$$\mu = \max \{x_1 - x_0, \dots, x_j - x_{j-1}, y_1 - y_0, \dots, y_k - y_{k-1}\}$$

افراز R به صفر نزدیک شود، بهتر خواهد شد. این نکات ما را به تعریف A_S به صورت حد

$$(2) \quad A_S = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i$$

رهنمون می‌سازد.

حال فرض کنیم i, j, k بردارهای یکه‌ای در امتداد محورهای x, y, z بوده و N_i یک قائم *بالا*ی به Π_i (و در نتیجه، به S_i یا S) در P_i باشد؛ یعنی، بردار ناصری عمود بر Π_i و رو به *بالا* که با محور z مثبت (و در نتیجه، با k) زاویه حاده γ_i بسازد برای تبدیل (۲) به انتگرال مضاعف روی R ، می‌بینیم که اگر ΔA_i مساحت زیرناحیه R_i باشد، آنگاه، دست کم به ازای یک " توفال " Π_i با اضلاع مستقیم^۱،

$$(3) \quad \Delta\sigma_i = \Delta A_i \sec \gamma_i,$$

برای مشاهده این امر، به شکل ۱۱ نگاه می‌کنیم که توفال با اضلاع مستقیم Π_i به شکل متوازی‌الاضلاع را نشان می‌دهد که به وسیله دو بردار a و b پیموده می‌شود. مساحت $\Delta\sigma_i$ توفال اندازه حاصل ضرب خارجی $a \times b$ است، ولی خود حاصل ضرب خارجی $a \times b$ قائمی چون N_i به Π_i می‌باشد (به خاطر سادگی، N_i را به گوشه Π_i وصل می‌کنیم). فرض کنیم زیر ناحیه مستطیلی R_i که زیر Π_i در صفحه xy واقع است به طول اضلاع Δx و Δy باشد. در این صورت، $\Delta A_i = \Delta x \Delta y$ ، و از شکل واضح است که

$$a = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D} = \Delta x i + (\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D}) = \Delta x i + rk,$$

۱. می‌توان نشان داد که حتی اگر تمام جملات $\Delta\sigma_i$ نظیر به توفال Π_i با اضلاع خمیده را حذف کنیم، مجموع (۲) به همان حد A_S نزدیک خواهد شد.

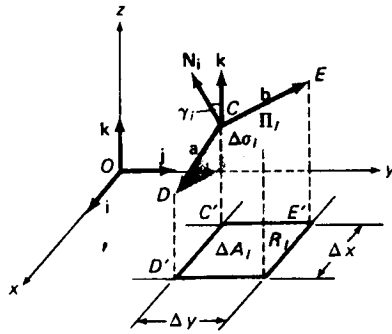
$\mathbf{b} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'E'} + \overrightarrow{E'E} = \Delta y \mathbf{j} + (\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{E'E}) = \Delta y \mathbf{j} + s \mathbf{k}$,
 که در آن r و s اسکالرهایی مناسبی می‌باشند. بنابراین،
 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\Delta x \mathbf{i} + r \mathbf{k}) \times (\Delta y \mathbf{j} + s \mathbf{k}) = \Delta x \Delta y \mathbf{k} - r \Delta y \mathbf{i} - s \Delta x \mathbf{j}$,
 در نتیجه،

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{k} = \Delta x \Delta y$$

ولذا،

$$\Delta \sigma_i \cos \gamma_i = \Delta x \Delta y = \Delta A_i,$$

که با (۳) معادل می‌باشد.



شکل ۱۱

پس از (۲) و (۳) معلوم می‌شود که

$$(۴) \quad A_S = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta A_i \sec \gamma_i.$$

با انتخاب $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ در فرمول (۳)، صفحه ۱۲۶۶، و توجه به این امر که S نمودار معادله $F(x, y, z) = 0$ است، معلوم می‌شود که

$$(۵) \quad \mathbf{N}_i = -f_x(p_i, q_i) \mathbf{i} - f_y(p_i, q_i) \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

یک قائم‌بالایی به Π_i در (p_i, q_i) است. بنابراین،

$$\cos \gamma_i = \frac{\mathbf{N}_i \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{N}_i| |\mathbf{k}|} = \frac{1}{\sqrt{[f_x(p_i, q_i)]^2 + [f_y(p_i, q_i)]^2 + 1}},$$

یا معادلاً

$$(۶) \quad \sec \gamma_i = \sqrt{[f_x(p_i, q_i)]^2 + [f_y(p_i, q_i)]^2 + 1}$$

بالاخره، با گذاردن (۶) در (۴)، معلوم می‌شود که

$$A_S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{[f_x(p_i, q_i)]^2 + [f_y(p_i, q_i)]^2 + 1} \Delta A_i.$$

این حد انتگرال مضاعف تابع

$$\sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}$$

روی R است. لذا، A_S از انتگرال زیر به دست می‌آید:

$$(۷) \quad A_S = \iint_R \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1} dA,$$

که وجودش را قضیه ۱، صفحه ۱۳۲۳، و پیوستگی مشتقات جزئی f_x و f_y بر R تضمین می‌کنند که پیوستگی انتگرالده بر R را نتیجه می‌دهند. فرمول (۷) را می‌توان به صورت فشرده‌تر زیر نوشت:

$$(۷') \quad A_S = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA.$$

البته، برای حالتی که سطح S نمودار یک تابع به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر تعریف شده بر یک ناحیه در صفحه مختصاتی غیر از صفحه xy باشد، فرمولهای مشابهی وجود دارند. برای به دست آوردن این فرمولها، انتگرالده (۷') را با

$$\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}$$

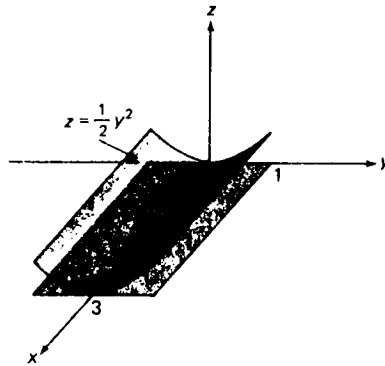
اگر R ناحیه‌ای در صفحه xz باشد، و با

$$\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1}$$

اگر R ناحیه‌ای در صفحه yz باشد تعویض کنید.

مثال ۱. فرض کنید S بخشی از استوانه سهموی $z = \frac{1}{2}y^2$ روی ناحیه مستطیلی R در صفحه xy باشد که به محور y ، خط $x = 3$ ، و خطوط $y = \pm 1$ محدود شده است (ر. ک. شکل ۱۲). مساحت A_S سطح S را پیدا نمایید.

حل. بنابر تقارن، A_S دو برابر مساحت قسمتی از S است که روی ربع اول صفحه xy قرار



شکل ۱۲

دارد. لذا، با اعمال فرمول (۷)، و به کمک فرمول (۶)، صفحه ۶۲۹، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} A_S &= 2 \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA = 2 \int_0^3 dx \int_0^1 \sqrt{y^2 + 1} dy \\ &= 6 \left[\frac{1}{2} y \sqrt{y^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \right]_0^1 \\ &= 3[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})] \approx 6.89. \end{aligned}$$

کاربرد فرمول (۷) یا (۷') اغلب به یک انتگرال مجازی همگرا منجر می‌شود. در این حالات، مساحت A_S مقدار این انتگرال مجازی گرفته می‌شود.

مثال ۲. مساحت A_S سطح S که نمودار تابع $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ($a > 0$) است را بیابید.

حل. چون S نیمکره‌ای به شعاع a است، از قبل می‌دانیم که $A_S = \frac{1}{2}(4\pi a^2) = 2\pi a^2$ لذا، این مثال فقط برای توضیح روش آورده شده است. با آنکه تابع $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ بر قلمرو تعریفش، یعنی قرص بسته $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq a^2\}$ ، پیوسته است، ولی بر R به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر نیست، زیرا مشتقات جزئی

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

بر دایره $x^2 + y^2 = a^2$ که مرز R است وجود ندارد. ولی $\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ بر هر قرص

$$R_u = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq u^2\} \quad (0 < u < a)$$

با شعاع کوچکتر u به طور پیوسته مشتقپذیر می باشد؛ و لذا، شایسته است مساحت S را با انتگرال مضاعف مجازی

$$\begin{aligned} A_S &= \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA \\ &= \iint_R \sqrt{\frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2} + 1} dA \\ &= \iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dA = \lim_{u \rightarrow a^-} \iint_{R_u} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dA \end{aligned}$$

تعریف کنیم. به خاطر تقارن مستدیر، به مختصات قطبی می رویم، داریم

$$\begin{aligned} \iint_{R_u} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dA &= a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^u \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr = 2\pi a \left[-\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^u \\ &= 2\pi a (a - \sqrt{a^2 - u^2}), \end{aligned}$$

و در نتیجه،

$$A_S = 2\pi a \lim_{u \rightarrow a^-} (a - \sqrt{a^2 - u^2}) = 2\pi a^2.$$

انتگرالهای سطح. حال انتگرال یک تابع پیوسته روی سطح خمیده^۶ S را تعریف می کنیم. بار دیگر فرض کنیم S نمودار تابع به طور پیوسته مشتقپذیر $z = f(x, y)$ باشد که بر ناحیه^۶ نرمال R در صفحه^۶ xy تعریف شده است، و نقاط تقسیم x_i, y_i ، اندازه^۶ μ ، زیر ناحیه های R_i ، و "مساحات مقدماتی" $\Delta\sigma_i$ و ΔA_i همان معانی قبل را داشته باشند. همچنین یک تابع سه متغیره باشد که بر سطح S پیوسته است؛ این یعنی تابع مرکب $g(x, y, z)$ بر ناحیه^۶ R که تصویر S روی صفحه^۶ xy است پیوسته می باشد. با اختیار نقطه^۶ دلخواه (p_i, q_i) در هر زیر ناحیه^۶ R_i ، مجموع

$$\sum_{i=1}^n g(p_i, q_i, f(p_i, q_i)) \Delta\sigma_i$$

را تشکیل می دهیم. فرض کنیم وقتی اندازه^۶ μ به صفر نزدیک شود، این مجموع،

بی توجه به انتخاب اعداد x_j, y_k, p_i, q_i و q_i صادق در شرایط مقرر، به حدی متناهی نزدیک گردد. در این صورت، این حد را **انتگرال (سطح) g روی S نامیم** و با

$$\iint_S g(x, y, z) d\sigma$$

نشان می دهیم، و گوییم تابع g بر S ، یا روی S ، **انتگرال پذیر** است. لذا،

$$(۸) \quad \iint_S g(x, y, z) d\sigma = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(p_i, q_i, f(p_i, q_i)) \Delta\sigma_i,$$

که در آن g **انتگرالده** انتگرال سمت چپ نام دارد.

مثال ۳. با اختیار $g(x, y, z) \equiv 1$ در فرمول (۸)، به دست می آید

$$\iint_S 1 d\sigma = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i = A_S,$$

که در آن A_S مساحت سطح S می باشد. پس نتیجه می شود که

$$A_S = \iint_S d\sigma.$$

برای محاسبه انتگرال سطح $\iint_S g(x, y, z) d\sigma$ روی S ، به موازات استدلالی که برای به دست آمدن فرمول (۷) برای مساحت S به کار رفت حرکت می کنیم. لذا، S را با R و $\Delta\sigma_i$ را با $\Delta A_i \sec \gamma_i$ تعویض می کنیم، که در آن γ_i زاویه بین محور z مثبت و یک قوائم رویه بالا به S در $P_i = (p_i, q_i, f(p_i, q_i))$ است. در نتیجه، به کمک (۶) داریم

$$\begin{aligned} \iint_S g(x, y, z) d\sigma &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(p_i, q_i, f(p_i, q_i)) \Delta A_i \sec \gamma_i \\ &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(p_i, q_i, f(p_i, q_i)) \sqrt{[f_x(p_i, q_i)]^2 + [f_y(p_i, q_i)]^2 + 1} \Delta A_i, \end{aligned}$$

که در آن حد سمت راست انتگرال مضاعف زیر است:

$$\iint_R g(x, y, f(x, y)) \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1} dA.$$

که وجودش را فرض پیوستگی توابع g ، f_x ، و f_y بر R تضمین می‌نماید. بنابراین،

$$(۹) \quad \iint_S g(x, y, z) d\sigma = \iint_R g(x, y, f(x, y)) \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1} dA$$

یا، به‌طور فشرده‌تر،

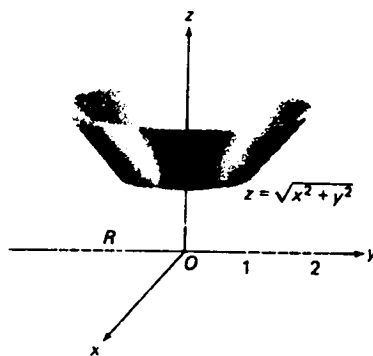
$$(۹) \quad \iint_S g(x, y, z) d\sigma = \iint_R g(x, y, z) \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA,$$

که در طرف راست، $z = f(x, y)$. البته، برای حالتی که S نمودار تابع به‌طور پیوسته مشتق‌پذیری است که بر ناحیه‌ای در صفحه xz یا صفحه yz تعریف شده است، فرمولهایی مشابه (۹) و (۹') وجود دارند.

مثال ۴. انتگرال سطح

$$\iint_S \ln z d\sigma$$

را در صورتی حساب کنید که S بخشی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ باشد که بین صفحات $z = 1$ و $z = 2$ قرار دارد (ر. ک.، شکل ۱۳).



شکل ۱۳

حل. تصویر S روی صفحه xy ناحیه طوقی $R = \{(x, y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ است، و

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

لذا، از (۹) پس از رفتن به مختصات قطبی نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} \iint_S \ln z \, d\sigma &= \iint_R \ln \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1} \, dA \\ &= \sqrt{2} \iint_R \ln \sqrt{x^2 + y^2} \, dA = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r \ln r \, dr. \end{aligned}$$

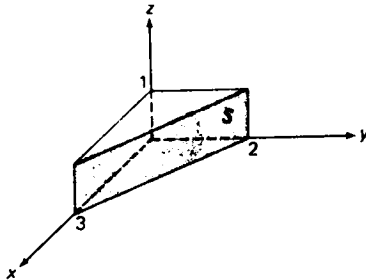
بنابراین، به کمک انتگرالگیری جزء به جزء،

$$\iint_S \ln z \, d\sigma = 2\pi\sqrt{2} \left[\frac{1}{2} r^2 \ln r - \frac{1}{4} r^2 \right]_1^2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} (8 \ln 2 - 3) \approx 5.65.$$

مثال ۵. انتگرال سطح

$$\iint_S xz \, d\sigma$$

را در صورتی بیابید که S بخشی از صفحه $2x + 3y = 6$ در یکپهشت اول باشد که بین صفحات $z = 1$ و $z = 0$ قرار دارد (ر. ک. شکل ۱۴).



شکل ۱۴

حل. چون S موازی محور z است، پس نمودار تابع $z = f(x, y)$ نیست. لیکن، نمودار تابع $y = 2 - \frac{2}{3}x$ بر ناحیه مستطیلی $R' = \{(x, z): 0 \leq x \leq 3, 0 \leq z \leq 1\}$ در صفحه xz ، و نیز نمودار تابع $x = 3 - \frac{3}{2}y$ بر ناحیه مستطیلی $R'' = \{(y, z): 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$ در صفحه yz می باشد. بنابراین،

$$\begin{aligned} \iint_S xz \, d\sigma &= \iint_R xz \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1} \, dx \, dz = \frac{\sqrt{13}}{3} \int_0^3 dx \int_0^1 xz \, dz \\ &= \frac{\sqrt{13}}{3} \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3 \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^1 = \frac{\sqrt{13}}{3} \left(\frac{9}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{13}}{4}, \end{aligned}$$

یا، به صورت دیگر،

$$\begin{aligned} \iint_S xz \, d\sigma &= \iint_{R'} \left(3 - \frac{3}{2}y\right) z \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1} \, dy \, dz \\ &= \frac{\sqrt{13}}{2} \int_0^2 dy \int_0^1 \left(3 - \frac{3}{2}y\right) z \, dz \\ &= \frac{3\sqrt{13}}{2} \left[y - \frac{1}{4}y^2\right]_0^2 \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^1 = \frac{3\sqrt{13}}{2} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{13}}{4} \end{aligned}$$

همانطور که جرم کل یک سیم به شکل منحنی C با انتگرال خط $\int_C \rho(x, y) \, ds$ داده می‌شود، که در آن $\rho(x, y)$ چگالی در نقطه (x, y) از C است که با واحدهایی چون گرم بر سانتیمتر سنجیده می‌شود، جرم کل یک ورقه فلزی نازک به شکل سطح S از انتگرال سطح $\iint_S \rho(x, y, z) \, d\sigma$ به دست می‌آید، که در آن $\rho(x, y, z)$ چگالی در نقطه (x, y, z) از S است که با واحدهایی چون گرم بر سانتیمترمربع سنجیده خواهد شد. شرح جزئیات لازم نیست، چرا که قبلاً در فصل ۱۴ برای اجسام جامد، ورقه‌های مسطح، و سیمها با چگالی متغیر داده شده است. در این وضع می‌توان مرکز جرم و گشتاورهای ماند یک سطح فلزی با چگالی متغیر یا ثابت را نیز تعریف کرد (ر.ک. مسائل ۲۱ تا ۲۳).

ما اغلب می‌خواهیم یک انتگرال سطح را روی سطح S مرکب از تعدادی متناهی زیر سطح S_1, S_2, \dots, S_n حساب کنیم که هر یک نمودار یک تابع به طور پیوسته مشتقپذیر بوده و فقط در بخشی یا تمام منحنیهای مرزی سهمیند ولی نقطه مشترک دیگری ندارند. انتگرال تابع پیوسته g روی سطح S به‌طور طبیعی تعریف شده و مساوی مجموع انتگرالهای g روی زیرسطوح S_1, S_2, \dots, S_n گرفته می‌شود. به‌طور مشخص،

$$(10) \quad \iint_S g \, d\sigma = \iint_{S_1} g \, d\sigma + \iint_{S_2} g \, d\sigma + \dots + \iint_{S_n} g \, d\sigma,$$

که در آن برای اختصار به‌جای $g(x, y, z)$ فقط می‌نویسیم g .

$$\begin{aligned} \iint_S xy^2z^3 d\sigma &= \left(\int_0^1 y^2 dy\right)\left(\int_0^1 z^3 dz\right) + \left(\int_0^1 x dx\right)\left(\int_0^1 z^3 dz\right) \\ &\quad + \left(\int_0^1 x dx\right)\left(\int_0^1 y^2 dy\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

بردارهای یکه قائم به یک سطح. مجموعه بردارهای یکه قائم به سطح S یک میدان برداری بر S را تشکیل می دهد. مثلا "، فرض کنیم S نمودار یک تابع به طور پیوسته مشتقپذیرمانند

$$z = f(x, y) \quad (x, y) \in R$$

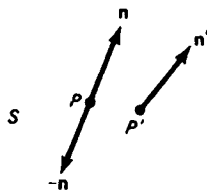
باشد، که در آن R ناحیه ای در صفحه xy است. در این صورت، همان استدلالی که به فرمول (۵) منجر شد نشان می دهد که

$$\mathbf{n} = \frac{-f_x(x, y)\mathbf{i} - f_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}}$$

یک بردار یکه قائم به S در نقطه $P = (x, y, f(x, y))$ است، و همین طور بردار جهت-مقابل

$$-\mathbf{n} = \frac{f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}}$$

در واقع، \mathbf{n} بردار یکه بالایی به S در P است که از S به بالا اشاره داشته، و $-\mathbf{n}$ بردار یکه پایینی به S در P است که از S به پایین اشاره دارد (به یاد داشته باشید که $0 < \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \leq 1$) همانطور که در شکل ۱۶ نشان داده شده، فقط دو بردار یکه به S در P وجود دارد. فرض کنیم \mathbf{n}' قائم یکه بالایی در نقطه دیگر P' از S باشد (ر. ک. شکل). در این صورت، به خاطر پیوستگی مشتقات جزئی f_x و f_y ، زاویه بین \mathbf{n} و \mathbf{n}' را می توان با اختیار P' به قدر کافی نزدیک P بدخواه کوچک کرد. این امر با گفتن اینکه قائم یکه \mathbf{n} بر S به طور پیوسته تغییر



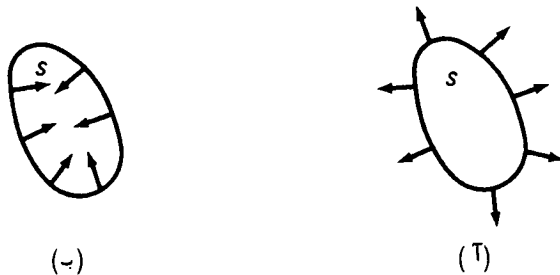
شکل ۱۶

می‌کند، یا اینکه قائم یکه پیوسته n بر S وجود دارد بیان می‌شود. هرگاه n یک قائم یکه پیوسته بر S باشد، آنگاه بردار یکه متقابل $-n$ نیز چنین است. یک سطح با بردار یکه قائم پیوسته را هموار می‌گویند.

در این وضع، می‌توان دو قائم یکه پیوسته بر سطح تعریف کرد که نمودار تابع به طور پیوسته مشتق پذیری به شکل $y = g(x, z)$ یا $x = h(y, z)$ باشد. مثلاً، دو قائم یکه در نقطه $P = (x, g(x, z), z)$ از نمودار $y = g(x, z)$ عبارتند از

$$\pm \frac{-g_x(x, z)\mathbf{i} - g_z(x, z)\mathbf{k} + \mathbf{j}}{\sqrt{[g_x(x, z)]^2 + [g_z(x, z)]^2 + 1}}$$

همچنین، می‌توان دو میدان از بردارهای یکه قائم بر یک سطح "بسته" S ، مانند کره، بیضی‌گون، یا مکعب، تعریف کرد که فضا را به دو ناحیه تقسیم کنند، یک ناحیه کراندار به نام داخل S و یک ناحیه بی‌کران به نام خارج S . در این صورت، یک میدان از قائمهای یکه از قائمهای یکه خارجی به S تشکیل شده است که، مثل شکل ۱۷ (T) اشاره به خارج S دارد، و میدان دیگر از قائمهای یکه داخلی تشکیل شده است که، مثل شکل ۱۷ (ب)، اشاره به داخل S دارد. روی یک مکعب، وقتی بردار یکه از یک وجه به دیگری می‌رود،



شکل ۱۷

تغییر جهت ناگهانی دارد، لذا، یک مکعب سطح همواری نیست، ولی قطعه قطعه هموار است. بدین معنی که از تعدادی متناهی سطح هموار تشکیل شده است که در امتداد مرزهایشان به هم وصل شده‌اند (در مکعب، این سطوح هموار شش وجه آن می‌باشند).

تبصره. تمام سطوح مورد بحث دوطرفه هستند. مثلاً، نمودار تابع $z = f(x, y)$ یک طرف بالایی و یک طرف پایینی دارد، کره خارج و داخل دارد، و از این قبیل. با آنکه منحصرًا به سطوح دوطرفه توجه داریم، باید از وجود سطوح یکطرفه آگاه بود (یک نمونه کلاسیک از این سطوح در مسئله ۲۴ ذکر شده است).

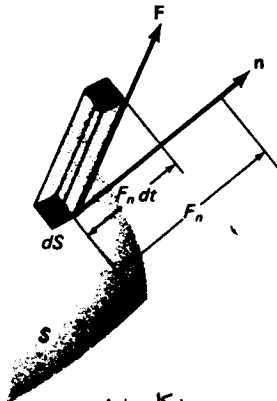
شار یک میدان برداری در امتداد یک سطح. حال نوع خاصی از انتگرالهای سطح را معرفی می‌کنیم که در ریاضیات کار بسته اهمیتی اساسی داشته و در دو بخش آخرین فصل نقشی کلیدی ایفا می‌کند. فرض کنید S یک سطح (دوطرفه) هموار باشد که بر آن بردار بیکه پیوسته $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{r})$ اختیار شده است، که بردار موضع نقطه متغیر S بوده، و $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ یک میدان برداری پیوسته بر S باشد. در این صورت، منظور از شار \mathbf{F} در امتداد S یعنی انتگرال سطح

$$(11) \quad \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma,$$

شامل حاصل ضرب نقطه‌ای $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ با عکس کردن جهت \mathbf{n} ، یعنی انتخاب قائم پیوسته دیگر $-\mathbf{n}$ بر S ، علامت شار عوض می‌شود، زیرا

$$\iint_S (\mathbf{F} \cdot -\mathbf{n}) \, d\sigma = \iint_S -(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma = - \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

برای تعبیر فیزیکی انتگرال شار (11)، فرض می‌کنیم سطح S در مایعی با سرعت $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ که از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر کرده ولی مستقل از زمان است فرو رفته باشد (به زبان مکانیک مایعات، یک "شارش حالست پایدار"). در این صورت، شار \mathbf{F} در امتداد S عبارت است از حجم خالص مایعی که در واحد زمان از یک طرف که با $-\mathbf{n}$ معین می‌شود به طرفی که با \mathbf{n} مشخص می‌شود در امتداد S جریان می‌یابد. برای مشاهده این امر به صورت زیر استدلال کرده، از دیفرانسیلها به طور شهودی استفاده می‌کنیم. در یک بازه زمانی به طول کوتاه dt ، حجم مایع عبور کرده از قطعه کوچکی از S ، که آن را با dS نمایش می‌دهیم، مساوی حجم استوانه‌ای است (معمولا "مایل") به قاعده dS و ارتفاع $F_n dt$ ، که در آن F_n مؤلفه \mathbf{F} در امتداد \mathbf{n} است؛ ر.ک. شکل ۱۸.



شکل ۱۸

این حجم مساوی است با $F_n dt d\sigma$ ، که در آن $d\sigma$ مساحت dS می‌باشد (مثال ۱، صفحه ۶۹۹، را به یاد آورید). در اینجا فرض می‌کنیم زاویه بین \mathbf{F} و \mathbf{n} از 90° متجاوز نباشد؛ در غیر این صورت، استوانه در طرف دیگر S قرار داشته و حجم مایع جریان یافته از dS منفی است (قدر مطلق آن مساوی حجم استوانه است)، زیرا شارش اینک از طرف معین شده با \mathbf{n} به طرف معین شده با $-\mathbf{n}$ است. لذا، حجم مایع عبور کرده در امتداد dS بر واحد زمان مساوی است با

$$\frac{F_n dt d\sigma}{dt} = F_n d\sigma = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

و با جمع‌بندی سهمهای تمام قطعات کوچک به سطح dS که S را می‌سازند، انتگرال شار (۱۱) به دست خواهد آمد. اگر آخرین مرحله را خیلی شتاب زده می‌بینید، S را به زیرسطحهای کوچک S_1, S_2, \dots, S_n افراز کرده، \mathbf{r}_i را بردار موضع نقطه دلخواه S_i گرفته، و مجموع ریمان $\sum_{i=1}^n [\mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_i)] \Delta\sigma_i$ را تشکیل دهید، که در آن $\Delta\sigma_i$ مساحت S_i می‌باشد. در این صورت، انتگرال شار (۱۱) حد این مجموع است وقتی μ ، یعنی اندازه ماکزیمم زیر سطوحها، به صفر نزدیک گردد. ("اندازه" S_i خود ماکزیمم فاصله بین نقاط S_i می‌باشد.)

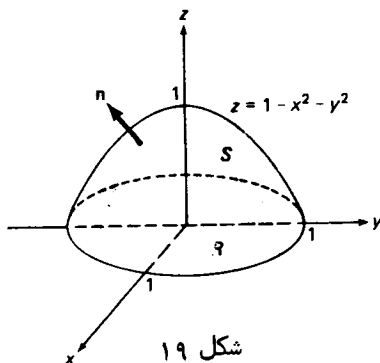
مثال ۷. شار میدان $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ را در امتداد سطح S که نمودار

$$z = 1 - x^2 - y^2 \quad (z \geq 0)$$

است، با انتخاب \mathbf{n} به عنوان قائم‌یکه بالایی به S ، حساب کنید.

حل. سطح S "عرقچین سهموی" شکل ۱۹ است. چون

$$\mathbf{N} = -\frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}$$



شکل ۱۹

یک قائم بالای به S است، بردار $\mathbf{n} = \mathbf{N}/|\mathbf{N}|$ قائم یگانه بالایی به S می‌باشد (توجه کنید که $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0$) اما $\mathbf{N} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}$ و

$$|\mathbf{N}| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}.$$

لذا، طبق فرمول (۹)،

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \iint_R (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) |\mathbf{N}| \, dA = \iint_R \left(\mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} \right) |\mathbf{N}| \, dA \\ &= \iint_R \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dA = \iint_R [x^2(2x) + y^2(2y) + z] \, dA \\ &= \iint_R [1 - (x^2 + y^2) + 2(x^3 + y^3)] \, dx \, dy, \end{aligned}$$

که در آن R قرص یگانه $x^2 + y^2 \leq 1$ در صفحه xy می‌باشد. با تبدیل به مختصات قطبی، معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 [1 - r^2 + 2r^3(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)] r \, dr \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4 + \frac{2}{5} r^5 (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) \right]_{r=0}^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4} + \frac{2}{5} (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) \right] d\theta = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

زیرا $\int_0^{2\pi} \cos^3 \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta \, d\theta = 0$ (چرا؟)

به‌طور کلی، هرگاه سطح هموار S نمودار تابع $z = f(x, y)$ باشد که بر ناحیه R_{xy} صفحه xy تعریف شده است، آنگاه، درست به روش حل مثال ۷، معلوم می‌شود که شار میدان برداری پیوسته $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ در امتداد S به صورت زیر است:

$$(۱۲) \quad \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_{R_{xy}} \left(-F_1 \frac{\partial z}{\partial x} - F_2 \frac{\partial z}{\partial y} + F_3 \right) dx \, dy \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0).$$

دو فرمول دیگر شار، که مشابه (۱۲) است، در مسئله ۳۱ داده شده‌اند.

مثال ۸. شار میدان $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + x^2z^2\mathbf{k}$ خارج از مکعب S در یک‌هشت اول را بیابید

که به صفحات مختصات و صفحات $x=1$ ، $y=1$ ، و $z=1$ محدود شده است (همین سطح در مثال ۶ در نظر گرفته شده بود).

حل. طبیعی است که شار \mathbf{F} خارج مکعب S مساوی مجموع شارهای \mathbf{F} در امتداد شش وجه S ، از داخل S به خارج S ، تعریف می‌شود. در جدول زیر، این وجوه S_1, \dots, S_6 همراه با بردارهای یکه خارجی نظیر و مقادیر حاصل ضرب نقطه‌ای $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ ذکر شده‌اند (ر.ک. شکل ۱۵).

$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$	قائم یکه خارجی \mathbf{n}	وجه
$xy^2 = y^2$	\mathbf{i}	$S_1: x = 1$
$-yz = -z$	\mathbf{j}	$S_2: y = 1$
$x^2z^2 = x^2$	\mathbf{k}	$S_3: z = 1$
0	$-\mathbf{i}$	$S_4: x = 0$
0	$-\mathbf{j}$	$S_5: y = 0$
0	$-\mathbf{k}$	$S_6: z = 0$

چون بر S_4 ، S_5 ، و S_6 ، $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$ ، کافی است شارهای در امتداد سه وجه مکعب، یعنی وجه جلوی S_1 ، وجه سمت راست S_2 ، و وجه بالایی S_3 ، را در نظر بگیریم. بنابراین،

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma + \iint_{S_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \\ &= \iint_{R_1} y^2 \, dy \, dz + \iint_{R_2} (-z) \, dx \, dz + \iint_{R_3} x^2 \, dx \, dy, \end{aligned}$$

که در آن مثل مثال ۶ $R_2 = \{(x, z): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ ، $R_1 = \{(y, z): 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ و $R_3 = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ است. می‌توان $d\sigma$ را با حاصل ضرب دیفرانسیلهای مختصات نظیر به R_i عوض کرد. زیرا R_i موازی R_i می‌باشد. لذا، بالاخره، شار خالص \mathbf{F} خارج مکعب S ، عبارت است از

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \left(\int_0^1 y^2 \, dy \right) \left(\int_0^1 dz \right) - \left(\int_0^1 dx \right) \left(\int_0^1 z \, dz \right) \\ &\quad + \left(\int_0^1 x^2 \, dx \right) \left(\int_0^1 dz \right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

مسائل

مساحت A_S سطح داده شده S را بیابید .

۱. S بخشی از صفحه $3x + 2y + 6z = 12$ است که در یکپشت اول قرار دارد
۲. S بخشی از استوانه سهموی $z = x^2$ است که توسط صفحات $x = \sqrt{2}$ ، $y = x$ و $y = 2x$ جدا شده است
۳. S بخشی از مخروط $z^2 = 2xy$ است که بین صفحات $x = 0$ ، $y = 0$ ، $x = a$ و $y = b$ قرار دارد ($a > 0, b > 0$)
۴. S بخشی از مخروط $z^2 = 2xy$ است که داخل کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ به شعاع a قرار دارد
۵. S بخشی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ است که توسط استوانه مستدیر $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$) جدا شده است .
۶. S بخشی از استوانه مستدیر $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$) است که داخل کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ قرار دارد
۷. S عرقچین سهموی $z = 12 - y^2 - z^2$ ($x \geq 0$) است
۸. S بخشی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ است که توسط استوانه بیضوی $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$ جدا شده است
۹. S بخشی از استوانه $x^2 + z^2 = a^2$ است که داخل استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ با همان شعاع a قرار دارد
۱۰. S بخشی از مخروط $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ در یکپشت اول است که توسط صفحه $y + z = 4$ جدا شده است
۱۱. S بخشی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ است که بین صفحه xy و استوانه $x^2 + y^2 = 2y$ قرار دارد
۱۲. S بخشی از استوانه سهموی $z^2 = 4x$ است که توسط استوانه سهموی $y^2 = 4x$ و صفحه $x = 3$ جدا شده است

انتگرال سطح داده شده را حساب کنید .

۱۳. $\iint_S xyz \, d\sigma$ ، که در آن S بخشی از صفحه $x + y + z = 1$ است که در یکپشت اول

قرار دارد

۱۴. $\iint_S z^2 \, d\sigma$ ، که در آن S کره $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ است

۱۵. $\iint_S x^2 \, d\sigma$ ، که در آن S بخشی از مخروط $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ است که بین صفحات $x = 0$ و

$x = 1$ قرار دارد

۱۶. $\iint_S z \, d\sigma$ ، که در آن S بخشی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ است که در یکپهشت اول قرار

دارد .

۱۷. $\iint_S x^2 y^2 \, d\sigma$ ، که در آن S نیمکره $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ است

۱۸. $\iint_S y \, d\sigma$ ، که در آن S عرقچین سهموی $y = 2 - x^2 - z^2$ ($y \geq 0$) است

۱۹. $\iint_S (x + y + z) \, d\sigma$ ، که در آن S همان سطح مکعبی مثال ۶ است

۲۰. $\iint_S (x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2) \, d\sigma$ ، که در آن S بخشی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ است که از

استوانه $x^2 + y^2 = 2x$ جدا شده است .

فرض کنید S بخشی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ باشد که بین صفحات $z = 1$ و $z = 4$ واقع است ، و نیز چگالی در هر نقطه P از S مساوی فاصله P تا صفحه $z = 0$ باشد . در این صورت ، کمیات زیر را بیابید .

۲۱. جرم کل و مرکز جرم S

۲۲. گشتاور ماند S حول محور z

۲۳. مرکز گون S را در صورتی بیابید که S بخشی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ باشد که در یکپهشت اول قرار دارد .

۲۴. فرض کنید یک قطعه کاغذ مستطیلی نیم دور چرخیده و سپس دو انتهایش را به هم بچسبانیم . سطح حاصل ، به نام نوار موبیوس ، در شکل ۲۰ نموده شده است . چرا

دو انتهای نوار مستطیلی اصلی

نوار موبیوس

شکل ۲۰

این سطح یکطرفه است؟

راهنمایی. حشره‌ای در نظر بگیرید که در خط وسط نوار از نقطه P شروع به حرکت نماید.

شار $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$ را در صورتی حساب کنید که \mathbf{n} قائم بیکه بالایی به S ، به ازای میدان \mathbf{F} و سطح S داده شده، باشد.

۲۵. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ، S نیمکره $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

۲۶. $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ ، S عرقچین سهموی مثال ۷

۲۷. $\mathbf{F} = \mathbf{i} - y^2\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ ، S بخشی از سهمی گون هذلولوی $z = xy$ که بالای ناحیه مستطیلی $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2$ قرار دارد

۲۸. $\mathbf{F} = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$ ، S بخشی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ است که در یک‌هشت اول قرار دارد

۲۹. شار میدان $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ خارج سطح بسته S محدود به استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و صفحات $z = 0$ و $z = 3$ را پیدا کنید.

۳۰. شار میدان $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$ خارج از مکعب مثال ۸ را پیدا نمایید.

۳۱. فرض کنید $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ یک میدان برداری پیوسته بر سطح هموار S باشد که نمودار تابع $y = g(x, z)$ است که بر ناحیه R_{xz} در صفحه xz تعریف شده است. نشان دهید که

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_{R_{xz}} \left(-F_1 \frac{\partial y}{\partial x} + F_2 - F_3 \frac{\partial y}{\partial z} \right) dx \, dz.$$

همچنین، نشان دهید هرگاه S نمودار تابع $x = h(y, z)$ باشد که بر ناحیه R_{yz} در صفحه yz تعریف شده است، آنگاه

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_{R_{yz}} \left(F_1 - F_2 \frac{\partial x}{\partial y} - F_3 \frac{\partial x}{\partial z} \right) dy \, dz.$$

در اینجا \mathbf{n} قائم بیکه پیوسته‌ای بر S است که در شرط $z > 0$ در حالت اول و شرط $\mathbf{n} \cdot \mathbf{i} > 0$ در حالت دوم صدق می‌کند.

۳۲. فرض کنید S سطح همواری باشد که در آن واحد نمودار سه‌تابع $z = f(x, y)$ ، $y = g(x, z)$ و $x = h(y, z)$ است که بر نواحی R_{xy} ، R_{yz} و R_{xz} در صفحات xy ، xz ، و yz تعریف شده‌اند، و $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ یک تابع برداری پیوسته بر S باشد. نشان دهید هرگاه S قائم بیکه پیوسته‌ای چون \mathbf{n} داشته‌باشد که با هر سه محورهای مثبت مختصات

زاویه حاده بسازد، آنگاه

$$(یک) \quad \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_{R_{yz}} F_1 \, dy \, dz + \iint_{R_{xz}} F_2 \, dx \, dz + \iint_{R_{xy}} F_3 \, dx \, dy.$$

۳۳. انتگرال $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$ را به کمک فرمول (یک) در صورتی حساب کنید که $\mathbf{F} = yzi + xzj + xyk$

S بخشی از صفحه

$$x + y + z = a \quad (a > 0)$$

است که در یکپشت اول قرار دارد، و \mathbf{n} قائم بیکه بالایی به S می باشد. سپس جواب را با استفاده از فرمول (۱۲) امتحان نمایید.

۴۰۱۵. قضیه گرین؛ تغییر متغیر در انتگرالهای چندگانه

قضیه زیر، که به ریاضیدان خودآموز انگلیسی، جرج گرین^۱ (۱۸۴۱-۱۷۹۳) منسوب است، رابطه عمیق بین انتگرال خط در امتداد مرز یک ناحیه مسطح و انتگرال مضاعف مربوطه روی خود ناحیه را آشکار می سازد.

قضیه ۴ (قضیه گرین). فرض کنیم R ناحیه‌ای در صفحه xy باشد که از منحنی بسته ساده قطعه قطعه هموار C و درونش تشکیل شده است، و توابع $P = P(x, y)$ و $Q = Q(x, y)$ بر R به طور پیوسته مشتقپذیر باشند. در این صورت،

$$(۱) \quad \int_C P \, dx + Q \, dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA,$$

که در آن C خلاف جهت عقربه‌های ساعت پیموده می شود.

برهان ناقص. برهان کامل قضیه گرین در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته مطرح می شود؛ و لذا، قضیه فقط برای حالت خاصی که در آن R ناحیه ساده محدود به منحنی قطعه قطعه هموار C ثابت می شود (با اینحال، ر. ک. مسئله ۱۸). چون ناحیه R ساده است، به طور قائم و افقی ساده است؛ در نتیجه، بخصوص

$$R = \{(x, y): a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

که در آن، همانطور که فرض شد، g_1 و g_2 نمودارهای قطعه قطعه همواری دارند. این امر در

شکل ۲۱ (آ) نموده شده است، که در آن C منحنی بسته $KLMNK$ است؛ یعنی، منحنی از قوسهای KL ، LM ، MN ، و NK با همین ترتیب تشکیل شده است، و ما این امکان را می‌دهیم که یکی یا هر دو پاره‌خط LM و NK به یک نقطه تحویل می‌شوند. بنابراین قضیه ۲، صفحه ۱۳۲۹، به کار رفته در مورد $-\partial P/\partial y$ ،

$$\begin{aligned} \iint_R -\frac{\partial P}{\partial y} dA &= -\int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = -\int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] dx \\ &= \int_a^b P(x, g_1(x)) dx + \int_b^a P(x, g_2(x)) dx = \int_{KL} P dx + \int_{MN} P dx \end{aligned}$$

(ر. ک. فرمول (۱۱)، صفحه ۱۴۳۵). اما

$$\int_{LM} P dx = \int_{NK} P dx = 0,$$

زیرا بر LM و NK داریم $dx = 0$ ؛ و لذا،

$$\begin{aligned} \int_C P dx &= \int_{KL} P dx + \int_{LM} P dx + \int_{MN} P dx + \int_{NK} P dx \\ &= \int_{KL} P dx + \int_{MN} P dx, \end{aligned}$$

در نتیجه،

$$(۲) \quad \int_C P dx = \iint_R -\frac{\partial P}{\partial y} dA.$$

به همین نحو، با نمایش R به شکل

$$R = \{(x, y): c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

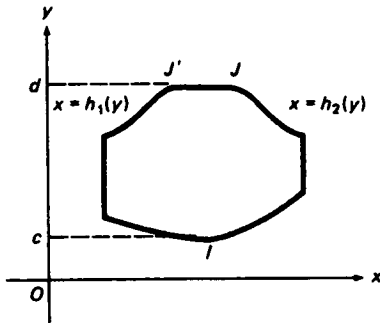
که در آن توابع h_1 و h_2 نمودارهای قطعه قطعه همواری بر $[c, d]$ اند، معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dA &= \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_c^d [Q(h_2(y), y) - Q(h_1(y), y)] dy \\ &= \int_c^d Q(h_2(y), y) dy + \int_d^c Q(h_1(y), y) dy = \int_{JJ'} Q dy + \int_{J'I} Q dy \end{aligned}$$

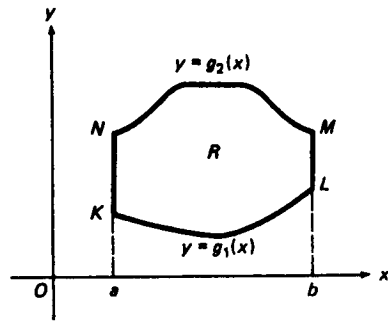
(ر. ک. شکل ۲۱ (ب)، که در آن R همان ناحیه شکل ۲۱ (آ) است منتها با حواشی مختلف).

$$\int_{JJ'} Q dy = 0,$$

اما



(A)



(B)

شکل ۲۱

زیرا بر JJ' ، $dy = 0$ ؛ و در نتیجه،

$$\int_C Q dy = \int_{JJ'} Q dy + \int_{JJ'} Q dy + \int_{JJ'} Q dy = \int_{JJ'} Q dy + \int_{JJ'} Q dy,$$

در نتیجه،

$$(۲) \quad \int_C Q dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dA.$$

با افزودن (۲) به (۲)، بالاخره فرمول مطلوب (۱) به دست می‌آید.

نتیجه ۱. فرض کنیم R و C همانند در قضیه گرین باشند. در این صورت، مساحت R از هر یک از فرمولهای زیر به دست می‌آید:

$$(۳) \quad A = -\int_C y dx, \quad A = \int_C x dy, \quad A = \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy,$$

که در آن C در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود.

برهان. انتخاب $P = -y, Q = 0$ فرمول (۱) را به $\int_C -y dx = \iint_R dA$ تبدیل می‌کند، ولی

انتخاب $P = 0, Q = x$ آن را به $\int_C x dy = \iint_R dA$ بدل می‌سازد. اما $\iint_R dA = A$ ، که دو

فرمول اول (۳) را ثابت خواهد کرد. برای به دست آوردن فرمول سوم، دو فرمول اول را

به هم افزوده و حاصل را نسبت به A حل کنید، یا در (۱) $P = -\frac{1}{2}y, Q = \frac{1}{2}x$ را اختیار نمایید.

انتگرالهای خط و سطح ۱۴۸۳

نتیجه ۲. فرض کنیم مؤلفه‌های $P = P(x, y)$ و $Q = Q(x, y)$ میدان برداری به طور پیوسته مشتق پذیر $F = Pi + Qj$ در هر نقطه از قلمرو همبند ساده D در شرط $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ صدق کنند. در این صورت، F بر D مستقل از مسیر است، یا معادلاً " F یک میدان گرادیان بر D می‌باشد.

برهان. فرض کنیم C یک مسیر بسته ساده در D بوده، و در هر نقطه D ، $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$. چون D همبند ساده است، درون C نیز مشمول D است (صفحه ۴۴۴ را به یاد آورید). لذا، بر ناحیه R مرکب از C و درون آن، $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ ، اما، طبق قضیه گرین،

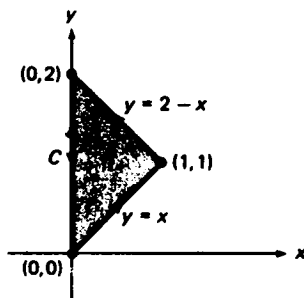
$$\int_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_R 0 dA = 0.$$

بنابراین، به ازای هر مسیر بسته ساده C مشمول D ، $\int_C P dx + Q dy = 0$. پس از تبصره صفحه ۴۴۹ معلوم می‌شود که انتگرال خط F بر D از مسیر مستقل است، یا معادلاً " F بر D میدان گرادیان می‌باشد (قضیه ۱، صفحه ۴۴۴، را به یاد آورید).

مثال ۱. با استفاده از قضیه گرین، انتگرال خط

$$\int_C (x^2 + y^2) dx + (x + 2y)^2 dy$$

را در صورتی حساب کنید که C مثلث به رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 1)$ ، و $(0, 2)$ باشد که در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است (ر.ک. شکل ۲۲).



شکل ۲۲

حل. بنابر فرمول (۱) به ازای $P = x^2 + y^2$ ، $Q = (x + 2y)^2$ ، و ناحیه سایه‌دار R شکل

$$\begin{aligned} \int_C (x^2 + y^2) dx + (x + 2y)^2 dy &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} (x + 2y)^2 - \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2) \right] dA \\ &= \iint_R [2(x + 2y) - 2y] dA = 2 \iint_R (x + y) dA = 2 \int_0^1 dx \int_x^{2-x} (x + y) dy \\ &= 2 \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=x}^{2-x} dx = 2 \int_0^1 \left[x(2-x) + \frac{1}{2} (2-x)^2 - x^2 - \frac{1}{2} x^2 \right] dx \\ &= 4 \int_0^1 (1 - x^2) dx = 4 \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

جواب را با محاسبه مستقیم انتگرال خط امتحان کنید، که خواهید دید محاسبات مشکلتری دارد.

مثال ۲. با استفاده از نتیجه ۱، مساحت A محصور به یک بیضی با نیم محور اطول a و نیم محور اقصر b را پیدا نمایید.

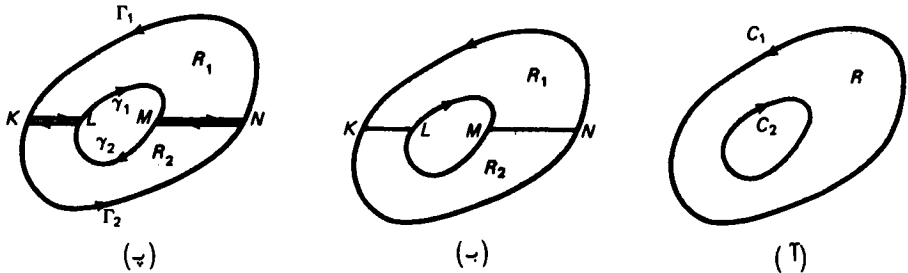
حل. با فرض اینکه بیضی نمایش پارامتری $(0 \leq t \leq 2\pi)$ $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ دارد خللی به کلیت وارد نمی شود. لذا، طبق فرمول سوم (۳)،

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(-b \sin t)(-a \sin t) + (a \cos t)(b \cos t)] dt \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt = \pi ab, \end{aligned}$$

و این را قبلاً در مثال ۴، صفحه ۹۲۴، دیدیم.

حالت منحنیهای دو مرزی. صورتی از قضیه گرین وجود دارد که در آن ناحیه R بین دو منحنی بسته ساده، قطعه قطعه هموار C_1 و C_2 واقع است. فرض کنیم C_2 ، مثل شکل ۳۳ (آ)، داخل C_1 واقع بوده، و جهت مثبت پیمودن منحنی C_1 یا C_2 چنان است که R همواره سمت چپ ناظری قرار می گیرد که منحنی را می بیند. لذا، جهت مثبت منحنی خارجی C_1 خلاف جهت عقربه های ساعت است، ولی جهت مثبت منحنی داخلی C_2 در جهت عقربه های ساعت می باشد. این امر با سر سهم روی منحنیها نموده شده است. دو پاره خط به نام "میان بر" رسم می کنیم که C_1 و C_2 را به هم وصل می کنند. در این صورت، ناحیه R بین C_1 و C_2 به دو زیر ناحیه R_1 و R_2 مثل شکل ۲۳ (ب) تقسیم می شود که هر یک فقط یک منحنی

بسته ساده به عنوان مرز دارد. به طور مشخص، با رجوع به شکل ۲۳ (پ)، می بینیم که مرز R_1 کنتوری است که از قوس Γ_1 ، پاره خط KL ، قوس γ_1 ، و پاره خط MN تشکیل شده است که به همین ترتیب و با جهات نموده شده پیموده می شود، ولی مرز R_2 کنتوری است که از قوس Γ_2 ، پاره خط NM ، قوس γ_2 ، و پاره خط LK تشکیل شده است.



شکل ۲۳

حال فرض کنیم توابع $P = P(x, y)$ و $Q = Q(x, y)$ بر R, R_1 و R_2 در نتیجه بر زیر ناحیه های R_1 و R_2 ، مشتق پذیر باشند. با اعمال قضیه گرین بر R_1 و R_2 ، معلوم می شود که

$$\begin{aligned} \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA &= \iint_{R_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA + \iint_{R_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ &= \left(\int_{\Gamma_1} P dx + Q dy + \int_{KL} \dots + \int_{\gamma_1} \dots + \int_{MN} \dots \right) \\ &\quad + \left(\int_{\Gamma_2} P dx + Q dy + \int_{NM} \dots + \int_{\gamma_2} \dots + \int_{LK} \dots \right), \end{aligned}$$

که در آن هر مورد نقاط... یعنی عبارت $P dx + Q dy$. اما، همانند فرمول (۱۳)، صفحه ۱۴۳۶، $\int_{MN} \dots = -\int_{NM} \dots$ و $\int_{LK} \dots = -\int_{KL} \dots$. لذا، انتگرالها در امتداد میان برها همدیگر را حذف می کنند، و آنچه می ماند عبارت است از

$$\begin{aligned} \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA &= \left(\int_{\Gamma_1} P dx + Q dy + \int_{\Gamma_2} \dots \right) \\ &\quad + \left(\int_{\gamma_1} P dx + Q dy + \int_{\gamma_2} \dots \right) \\ &= \int_{C_1} P dx + Q dy + \int_{C_2} P dx + Q dy \end{aligned}$$

(فرمول (۱۵) ، صفحه ۱۴۳۹، را به یاد آورید) . لذا ، قضیه گرین برای ناحیه R بین منحنیهای C_1 و C_2 برقرار است ، مشروط براینکه انتگرال $\int_C P dx + Q dy$ در فرمول (۱) به صورت مجموع انتگرالهای خط $\int_{C_1} P dx + Q dy$ و $\int_{C_2} P dx + Q dy$ تعبیر شود البته با این فرض که هر یک از منحنیهای C_1 و C_2 در جهت مثبت مناسبی پیموده شود .

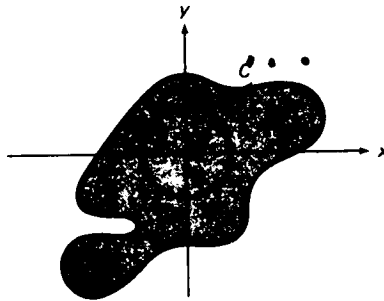
مثال ۳ . فرض کنید C منحنی بسته ساده قطعه قطعه همواری باشد که مبداء را احاطه کرده و یکبار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است . نشان دهید که

$$(۴) \quad \int_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = 2\pi.$$

حل . توابع $P = -y/(x^2 + y^2)$ و $Q = x/(x^2 + y^2)$ همه جا جز در مبداء تعریف شده و به طور پیوسته مشتقپذیر باشند ، و اگر $(x, y) \neq (0, 0)$ ،

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

فرض کنید γ دایره‌ای به مرکز مبداء بوده و یکبار در جهت عقربه‌های ساعت پیموده شده و آنقدر کوچک باشد که در C جای گیرد (ر.ک. شکل ۲۴) . در این صورت ، P و Q به



شکل ۲۴

طور پیوسته مشتقپذیر و بر ناحیه R بین C و γ در $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ صدق می‌کند . بنابراین ، این ، طبق قضیه گرین برای دو منحنی مرزی ،

$$\int_C P dx + Q dy + \int_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_R 0 dA = 0.$$

اما ، در این صورت ،

$$\int_C P dx + Q dy = - \int_{\gamma} P dx + Q dy = \int_{-\gamma} P dx + Q dy,$$

که در آن γ - خلاف جهت عقربه‌های ساعت پیوسته می‌شود. این فرمول (۴) را ثابت می‌کند، زیرا طبق مثال ۳، صفحه $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ ، $\int_{\gamma} P dx + Q dy = 2\pi$ ، به عنوان تمرین، از نتیجه ۲ استفاده کرده نشان دهید که اگر مبدأ خارج C باشد، طرف راست (۴) به جای 2π مساوی ۰ می‌شود.

تبدیلات مختصات و ژاکوبیها. حال، با استفاده از قضیه گرین، فرمولی برای تغییر متغیر انتگرال مضاعف ثابت می‌کنیم. نمونه مهمی از این‌گونه فرمولها قبلاً "در قضیه ۸، صفحه ۱۳۹۲ آمده است، که در آن نشان دادیم هرگاه $f(x, y)$ بر ناحیه R پیوسته بوده، و R نقش ناحیه R' در صفحه θ تحت تبدیل

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

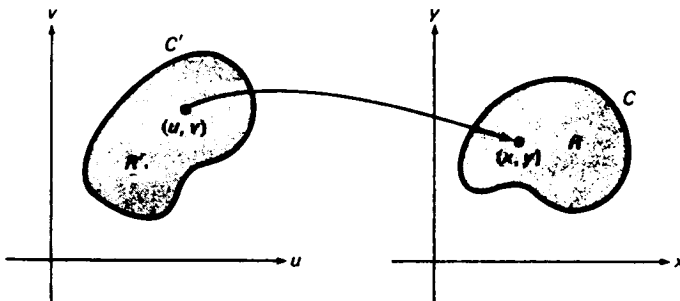
از مختصات قطبی r و θ به مختصات قائم x و y باشد، آنگاه

$$(5) \quad \iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

حال فرمولی مشابه (۵) برای تبدیل مختصات کلی به شکل

$$(6) \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v),$$

از مختصات u و v به مختصات قائم x و y جستجو می‌کنیم. فرض کنیم تبدیل (۶) بر ناحیه R' در صفحه uv تعریف شده باشد که عبارت است از منحنی بسته ساده قطعه هموار C' و درون آن، و نقش R' تحت این تبدیل ناحیه R در صفحه xy باشد که از منحنی بسته ساده قطعه هموار دیگر C و درونش، مثل شکل ۲۵، تشکیل شده است. به علاوه، فرض کنیم وقتی (u, v) منحنی C' را یکبار در جهت مثبت طی کند، نقش (x, y) نقطه (u, v) منحنی C را یکبار در جهت مثبت یا منفی طی خواهد کرد. همچنین، چند فرض دیگر در



باب تبدیل (۶) می‌کنیم :

(یک) توابع $x(u, v)$ و $y(u, v)$ پیوسته بوده و بر R' مشتقات جزئی اول و دوم پیوسته‌دارند ؛
(دو) دترمینان

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}$$

که ژاکوبی تبدیل (۶) نام داشته و به‌طور فشرده با $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ نموده می‌شود ، بر R' ناصفر است ؛

(سه) تبدیل (۶) یک به یک است ؛ یعنی ، نه فقط نظیر به هر نقطه از R' نقطه منحصر به فردی مانند (x, y) در R وجود دارد ، بلکه نظیر هر نقطه (x, y) در R نقطه منحصر به فرد (u, v) در R' نیز موجود است ، و تبدیل از R به R' با

$$(۶') \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

نموده خواهد شد .

تحت این شرایط می‌توان نشان داد که توابع $u(x, y)$ و $v(x, y)$ بر R پیوسته بوده ، و مشتقات جزئی اول و دوم پیوسته دارند ، و نیز ژاکوبی

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}$$

تبدیل معکوس (۶') بر R ناصفر بوده و در فرمول

$$(۷) \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1$$

صدق خواهد کرد (ر.ک. مسئله ۲۶) . بخصوص ، رابطه (۷) ایجاب می‌کند که ژاکوبیهای $\partial(u, v)/\partial(x, y)$ و $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ بر نواحی مربوطه R و R' هم‌علامت می‌باشند .

تغییر متغیر در انتگرالهای مضاعف . حال ، با تمام فرضهای فوق در باب تبدیلات (۶) و (۶') ، نواحی R و R' ، و منحنیهای C و C' ، قضیه‌ای بیان می‌کنیم که فرمول (۵) را تعمیم خواهد داد . برهان قضیه سراسر ولی کاربردی نسبتاً " تکنیکی از قضیه گریین است ، و لذا ، به آخر بخش مוקول شده است .

انتگرالهای خط و سطح ۱۴۸۹

قضیه ۵ (تغییر متغیر در انتگرالهای مضاعف). هرگاه $f(x, y)$ بر R پیوسته باشد، آنگاه

$$(۸) \quad \iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته نشان داده شده که قضیه ۵ تحت شرایط ضعیفتر نیز برقرار است؛ بخصوص، اگر تبدیل (۶) بر مرز ناحیه R' یک به یک نباشد.

مثال ۴. نشان دهید که فرمول (۵) حالت خاصی از فرمول (۸) است.

حل. فرض کنیم متغیرهای u و v مختصات قطبی r و θ باشند. در این صورت، تبدیل (۶) عبارت است از

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

که در آن $r \geq 0$ (ر.ک. صفحه ۱۳۹۱)، و ژاکوبی $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ به صورت زیر درمی آید:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$

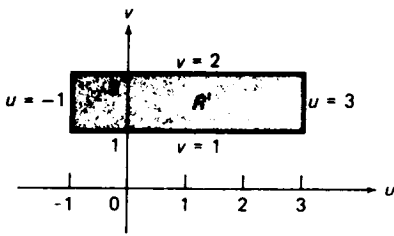
لذا، به ازای این انتخاب u و v ، فرمول (۸) به (۵) تحویل خواهد شد.

مثال ۵. انتگرال مضاعف $\iint_R xy dx dy$ را در صورتی حساب کنید که R ناحیه شکل ۲۶ (۷) است که مرز C متوازی الاضلاع به اضلاعی در امتداد خطوط $x + 3y = 3$ ، $x + 3y = -1$ و $x - y = 1$ و $x - y = 2$ باشد.

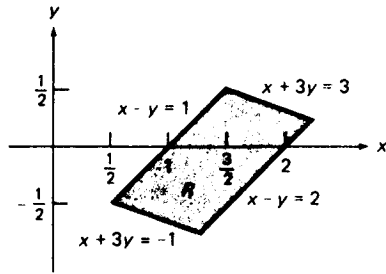
حل. عبارات $x + 3y$ و $x - y$ در معادلات خطوطی می آیند که R را محدود کرده اند، و این عبارات متغیرهای جدید

$$(۹) \quad u = x + 3y, \quad v = x - y$$

را می نمایند، زیرا در این صورت معادلات خطوط به $u = -1$ ، $u = 3$ ، $v = 1$ و $v = 2$ ساده می شوند. لذا، نقش R تحت تبدیل (۹) ناحیه R' در صفحه uv است که مرز C' مستطیلی است که اضلاعش در امتداد خطوط $u = -1$ ، $u = 3$ ، $v = 1$ و $v = 2$ می باشد، مانند شکل ۲۶ (ب). با حل دستگاه معادلات (۹) نسبت به x و y و برحسب u و v ، به



(ب)



(ا)

شکل ۲۶

دست می‌آوریم

$$(۹) \quad x = \frac{1}{4}(u + 3v), \quad y = \frac{1}{4}(u - v),$$

در نتیجه،

$$(۱۰) \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} = -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4}.$$

بنابراین، طبق فرمول (۸)،

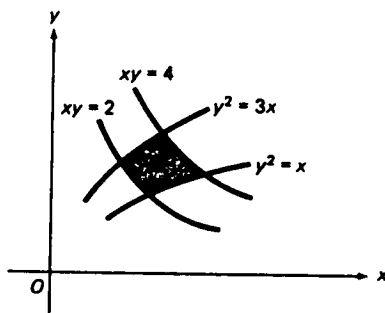
$$\begin{aligned} \iint_R xy \, dx \, dy &= \iint_{R'} \frac{1}{16}(u + 3v)(u - v) \left| -\frac{1}{4} \right| \, du \, dv \\ &= \frac{1}{64} \int_{-1}^3 du \int_1^2 (u^2 + 2uv - 3v^2) \, dv \\ &= \frac{1}{64} \int_{-1}^3 \left[u^2v + uv^2 - v^3 \right]_{v=1}^2 \, du \\ &= \frac{1}{64} \int_{-1}^3 (u^2 + 3u - 7) \, du = \frac{1}{64} \left[\frac{1}{3}u^3 + \frac{3}{2}u^2 - 7u \right]_{-1}^3 = -\frac{5}{48}. \end{aligned}$$

با بررسی متناظر بین رئوس C و C' ، به آسانی معلوم می‌شود که اگر کنتور C یا C' در جهتی (عقربه‌های ساعت یا خلاف آن) پیموده شود، دیگری جهت مخالف آن را خواهد داشت. انتظار این امر می‌رفت، زیرا ژاکوبی (۱۰) منفی است. توجه کنید که (۱۰) را می‌توان ابتدا با محاسبه $\partial(u, v)/\partial(x, y)$ و سپس اعمال فرمول (۷) به دست آورد. به‌عنوان

انتگرالهای خط و سطح ۱۴۹۱

تمرین ، انتگرال $\iint_R xy \, dx \, dy$ را مستقیماً حساب کرده ، و ببینید که استفاده از روش فعلی چقدر آسان است .

مثال ۶. انتگرال مضاعف $\iint_R (x^2/y^4) \, dx \, dy$ را در صورتی حساب کنید که R ناحیهء محدود به هذلولیهای $xy = 2$ ، $xy = 4$ ، و سهمیهای $y^2 = x$ ، $y^2 = 3x$ باشد (ر. ک. شکل ۲۷) .



شکل ۲۷

حل . یا نوشتن

$$xy = u, \quad y^2 = vx,$$

یا معادلاً

$$u = xy, \quad v = \frac{y^2}{x},$$

می بینیم که منحنیهایی که مرز R را تشکیل می دهند نظیر به مقادیر $u = 2$ ، $u = 4$ ، $v = 1$ ، و $v = 3$ اند . همچنین ،

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = \frac{3y^2}{x},$$

و در این صورت (۷) نتیجه می دهد که

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = \frac{x}{3y^2} = \frac{1}{3v}.$$

و با انتخاب $f(x, y) = x^2/y^4 = 1/v^2$ در فرمول (۸) و توجه به اینکه R' ناحیه مربعی $\{(u, v): 2 \leq u \leq 4, 1 \leq v \leq 3\}$ در صفحه uv است، معلوم می شود که

$$\iint_R \frac{x^2}{y^4} dx dy = \iint_{R'} \frac{du dv}{3v^3} = \frac{1}{3} \left(\int_2^4 du \right) \left(\int_1^3 \frac{dv}{v^3} \right) = \frac{2}{3} \left[-\frac{1}{2v^2} \right]_1^3 = \frac{8}{27}$$

تغییر متغیر در انتگرالهای سه گانه. نکات فوق را می توان به ابعاد سه تعمیم داد. فرض کنیم

$$(11) \quad x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

یک نگاشت سه بعدی از ناحیه T' توپر در فضای uvw به روی ناحیه T توپر در فضای xyz باشد، و فرض کنیم (۱۱) در شرایطی مشابه آنهایی که بر تبدیل دوبعدی (۶) اعمال شدند صدق نماید. بخصوص، فرض کنیم دترمینان 3×3

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

که ژاکوبی تبدیل (۱۱) نام داشته و به طور فشرده با $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ نموده می شود، بر T' ناصفر باشد. در این صورت، مشابه قضیه Δ را داریم، که آن را بدون برهان ذکر می کنیم:

قضیه Δ (تغییر متغیر در انتگرالهای سه گانه). هرگاه $f(x, y, z)$ بر T پیوسته باشد، آنگاه

$$(12) \quad \begin{aligned} & \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{T'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw. \end{aligned}$$

مثال ۷. حجم V متوازی السطوح T محدود به شش صفحه $x + y + 2z = \pm 3$ ، $x - 2y + z = \pm 2$ و $4x + y + z = \pm 6$ را پیدا کنید.

حل. با معرفی متغیرهای جدید

$$u = x + y + 2z, \quad v = x - 2y + z, \quad w = 4x + y + z,$$

که در آنها $3 \leq u \leq -3$ ، $2 \leq v \leq -2$ ، و $6 \leq w \leq -6$ ، معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -3 + 3 + 2(9) = 18. \end{aligned}$$

اما، بنابر مشابه فرمول (۷)،

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 1,$$

و در نتیجه،

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \frac{1}{18}.$$

لذا، طبق فرمول (۱۲) به ازای ۱،

$$\begin{aligned} V &= \iiint_T dx dy dz = \frac{1}{18} \left(\int_{-3}^3 du \right) \left(\int_{-2}^2 dv \right) \left(\int_{-6}^6 dw \right) \\ &= \frac{1}{18} (6)(4)(12) = 16. \end{aligned}$$

برهان قضیه ۵ (اختیاری). فرض کنیم

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x f(t, y) dt,$$

که در آن x_0 ثابت است؛ در نتیجه، $\partial F(x, y) / \partial x = f(x, y)$. بنابر قضیه گرین در صفحه،
به ازای $P = 0$ و $Q = F$

$$(13) \quad \iint_R f(x, y) dx dy = \iint_R \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx dy = \int_C F(x, y) dy,$$

که در آن C یکبار در جهت مثبت (خلاف جهت عقربه‌های ساعت) پیموده می‌شود. فرض کنیم

$$u = u(t), \quad v = v(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

معادلات پارامتری منحنی C' باشند (مرز ناحیه R') که یکبار در جهت مثبت پیموده می شود. در این صورت، C به معادلات پارامتری زیر است:

$$x = x(u(t), v(t)), \quad y = y(u(t), v(t)) \quad (a \leq t \leq b),$$

و وقتی t از a تا b تغییر کند، نقطه (x, y) منحنی C را یکبار در جهت مثبت یا منفی می پیماید (در آخر برهان دقیقاً " مشخص می شود). طرف راست (۱۳) را می توان برحسب تابع مرکب $G(t) = F(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)))$ به صورت زیر نوشت:

$$\int_C F(x, y) dy = \int_a^b G(t) \frac{dy}{dt} dt$$

اما، طبق قاعده زنجیره ای،

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt},$$

و لذا، برحسب تابع مرکب $H(u, v) = F(x(u, v), y(u, v))$

$$\begin{aligned} \int_C F(x, y) dy &= \int_a^b G(t) \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) dt \\ (14) \quad &= \int_{C'} H(u, v) \frac{\partial y}{\partial u} du + H(u, v) \frac{\partial y}{\partial v} dv \end{aligned}$$

مشاهده می کنید که طرف راست (۱۴) یک انتگرال در صفحه uv به شکل زیر است:

$$\int_{C'} P du + Q dv,$$

که در آن

$$P = H \frac{\partial y}{\partial u}, \quad Q = H \frac{\partial y}{\partial v}.$$

حال، برای ادامه برهان، انتگرال $\int_{C'} P du + Q dv$ را با اعمال مجدد قضیه گرین،

این بار در صفحه uv ، اعمال می کنیم. به طور مشروح،

$$\begin{aligned} \int_{C'} P du + Q dv &= \iint_{R'} \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) du dv \\ (15) \quad &= \iint_{R'} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(H \frac{\partial y}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(H \frac{\partial y}{\partial u} \right) \right] du dv \\ &= \iint_{R'} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + H \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} - \frac{\partial H}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} - H \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u} \right) du dv \end{aligned}$$

$$= \iint_{R'} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial H}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du dv,$$

که در آخرین مرحله از فرض پیوستگی مشتقات جزئی دوم $y(u, v)$ استفاده کرده ایم. اما، طبق قاعده زنجیره‌ای و تعریف H ،

$$(۱۶) \quad \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial H}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

لذا، از تلفیق روابط (۱۳) تا (۱۶) معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dx dy &= \pm \iint_{R'} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \frac{\partial y}{\partial v} - \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \right) \frac{\partial y}{\partial u} \right] du dv \\ (۱۷) \quad &= \pm \iint_{R'} \frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) du dv \\ &= \pm \iint_{R'} f(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv. \end{aligned}$$

در اینجا علامت به علاوه در صورتی اختیار می‌شود که C با افزایش t از a تا b در جهت مثبت پیموده شود، ولی اگر C در جهت منفی پیموده شود، باید علامت منفی اختیار گردد (چرا؟).

بالاخره، فرض کنیم $f(x, y) \equiv 1$. در این صورت، طرف چپ (۱۷) مساحت R است، که ذاتاً "مثبت است"، و این به ما می‌گوید که در صورت مثبت بودن ژاکوبی، $J = \partial(x, y)/\partial(u, v)$ علامت به علاوه و، در صورت منفی بودن J ، علامت منها را اختیار کنیم. به عبارت دیگر، اگر ژاکوبی J را با قدر مطلقش $|J| = |\partial(x, y)/\partial(u, v)|$ عوض کنیم، می‌توانیم در (۱۷) علامت \pm را حذف نماییم. در این صورت، فرمول (۱۷) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv,$$

و برهان قضیه ۵ کامل خواهد بود.

مسائل

انتگرال خط داده شده را با استفاده از قضیه گرین حساب کنید. (در هر حالت، منحنی C در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود.)

۱. $\int_C (y^4 - x) dx + (y - x^2) dy$ ، که در آن C مربعی به رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $(1, 1)$ ، و $(0, 1)$ است

۲. $\int_C (y + \ln x) dx + (x^3 + e^{-y}) dy$ ، که در آن C مثلثی به رئوس $(1, 0)$ ، $(2, 0)$ ، و $(2, 1)$ است

۳. $\int_C (3x - 2y) dx + (2x + 3y) dy$ ، که در آن C مرز ناحیه بین سهمیهای $y = x$ و $y = x^2$ است

۴. $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} dx + [xy^2 + y \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})] dy$ ، که در آن C مستطیلی به رئوس $(1, 0)$ ، $(4, 0)$ ، $(4, 5)$ ، و $(1, 5)$ است

۵. $\int_C -xy^2 dx + xy^2 dy$ ، که در آن C دایره $x^2 + y^2 = 4$ است

۶. $\int_C (2x + y) dx + 2x dy$ ، که در آن C بیضی $4x^2 + 9y^2 = 36$ است

۷. $\int_C e^x \cos y dx - e^x \sin y dy$ ، که در آن C بیضی $2x^2 + y^2 = 1$ است

۸. $\int_C \frac{xy^2}{1+x^2} dx + y \ln(1+x^2) dy$ ، که در آن C دایره $x^2 + y^2 + 2y = 0$ است

۹. $\int_C -y \sec^2 x dx + \tan x dy$ ، که در آن C مثلثی به رئوس $(0, 0)$ ، $(\pi/4, 0)$ ، و $(\pi/4, \pi/2)$ است

۱۰. $\int_C -xy dx + (y^2 + 16) dy$ ، که در آن C از نیمه بالایی بیضی $4x^2 + y^2 = 1$ و پاره خط واصل بین نقاط $(\pm \frac{1}{2}, 0)$ تشکیل شده است .

مساحت A ناحیه داده شده R را با استفاده از انتگرال خط بیابید .

۱۱. R ناحیه‌ای در ربع اول است که به هذلولی $xy = 4$ و خطوط $y = x$ و $y = 4x$ محصور شده است

۱۲. R ناحیه‌ای در ربع اول است که به هذلولی $8xy = 1$ و سهمیهای $y = x^2$ و $y^2 = x$ محصور شده است ، با نقطه $(1, 1)$ بر مرز

۱۳. R ناحیه محصور به ستاره‌گون

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t \quad (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0)$$

است (ر. ک. شکل ۴۵، صفحه ۷۴۵)

۱۴. ناحیه R محصور به دلگون

$$x = 2a \cos t - a \cos 2t, \quad y = 2a \sin t - a \sin 2t \\ (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0)$$

است (ر. ک. شکل ۴۸، صفحه ۷۴۹)

۱۵. فرض کنید R ناحیه‌ای در صفحه xy باشد که از منحنی ساده، قطعه قطعه هموار C و درونش تشکیل شده است. نشان دهید که مرکز گون R به مختصات زیر است:

$$\bar{x} = \frac{1}{2A} \int_C x^2 dy, \quad \bar{y} = -\frac{1}{2A} \int_C y^2 dx, \quad (\text{یک})$$

که در آن A مساحت R است.

۱۶. مرکز گون ناحیه مسئله ۱۱ را با استفاده از فرمولهای (یک) بیابید.

۱۷. انتگرال خط $\int_C P dx + Q dy$ را بر قلمرو همبند چندگانه‌ای چون D طوری مثال بزنید

که از مسیر مستقل باشد. (توجه کنید که نتیجه ۲ این امکان را از بین نمی‌برد)

۱۸. نشان دهید که قضیه گرین برای هر ناحیه بسته کراندار R که بتوان آن را با رسم

خطوط موازی مناسبی موازی محورهای مختصات به تعدادی متناهی زیر ناحیه ساده

تجزیه کرد برقرار است.

ژاکوبی $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ تبدیل داده شده را بیابید.

$$x = au + bv, y = cu + dv \quad ۱۹$$

$$x = u^2 - v^2, y = uv \quad ۲۰$$

$$x = \frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2), y = \arctan(v/u) \quad ۲۱$$

$$x = u^2v, y = uv^2 \quad ۲۲$$

$$x = e^u \cos v, y = e^u \sin v \quad ۲۳$$

$$x = ue^{-v}, y = ve^u \quad ۲۴$$

۲۵. تحقیق کنید که تبدیل مسئله ۲۳ و معکوسش در فرمول (۷) صدق می‌کنند.

۲۶. ثابت کنید که

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aA + bC & aB + bD \\ cA + dC & cB + dD \end{vmatrix}$$

و سپس، فرمول (۷) را با استفاده از این قاعده برای ضرب دترمینانهای 2×2 و به

کارگیری مکرر قاعده زنجیره‌ای ثابت نمایید.

ژاکوبی $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ تبدیل داده شده را بیابید.

$$x = au, y = au + bv, z = \beta u + \gamma v + cw \quad \cdot ۲۷$$

$$x = uv, y = uw, z = uv \quad \cdot ۲۸$$

$$x = u + v + w, y = u^2 + v^2 + w^2, z = uv + uw + vw \quad \cdot ۲۹$$

$$x = e^u \cos v \sin w, y = e^u \cos v \cos w, z = e^u \sin v \quad \cdot ۳۰$$

انتگرال مضاعف داده شده را با استفاده از قضیه ۵ و تغییر متغیر مناسبی حساب کنید .

$$\int\int_R x^2 dx dy \quad \cdot ۳۱$$

که در آن R ناحیه محدود به خطوط $2x + y = 3$ ، $2x + y = 1$ ،

$$x - 2y = 2 \text{ و } x - 2y = -1 \text{ است}$$

$$\int\int_R \left(1 + \frac{y}{x}\right) dx dy \quad \cdot ۳۲$$

که در آن R ناحیه محدود به خطوط $x + y = 1$ ، $y = 3x$ ، $y = 0$ ،

$$\text{و } x + y = 2 \text{ است .}$$

$$\int\int_R \frac{1}{y} dx dy \quad \cdot ۳۳$$

که در آن R ناحیه محدود به منحنیهای $y^3 = x^2$ ، $y^3 = 4x^2$ و خطوط

$$y = x, y = 2x \text{ است .}$$

$$\int\int_R x^2 y^2 dx dy \quad \cdot ۳۴$$

که در آن R ناحیه محدود به هذلولیهای $xy = 2$ ، $xy = 3$ و خطوط

$$y = x, y = 5x \text{ است .}$$

$$\int\int_R \frac{x^2 \sin xy}{y} dx dy \quad \cdot ۳۵$$

که در آن R ناحیه محدود به سهمیهای $x^2 = \pi y$ ، $x^2 = \pi y/2$ ،

$$\text{و } y^2 = x \text{ و } y^2 = x/2 \text{ است .}$$

$$\int\int_R \cos \frac{x-y}{x+y} dx dy \quad \cdot ۳۶$$

که در آن R ناحیه محدود به محور x ، خط $y = x$ ، و خط

$$x + y = \pi/2 \text{ است .}$$

$$\iiint_T yz dx dy dz \quad \cdot ۳۷$$

انتگرال سه‌گانه را در صورتی حساب کنید که T ناحیه محدود به شش

$$\text{صفحه } x + y + z = \pm 2, x + y + z = \pm 3, \text{ و } x + y - z = \pm 1 \text{ باشد .}$$

$$\cdot ۳۸$$

نشان دهید که قضیه ۹ ، صفحه ۱۴۰۶ ، راجع به انتگرالهای سه‌گانه در مختصات

استوانه‌ای ، حالت خاصی از قضیه ۶ راجع به تغییر مختصات در انتگرالهای سه‌گانه است .

$$\cdot ۳۹$$

نشان دهید که قضیه ۱۰ ، صفحه ۱۴۱۶ ، راجع به انتگرالهای سه‌گانه در مختصات

کروی نیز حالت خاصی از قضیه ۶ می باشد .

۴۰. ابتدا، با تبدیل $x = au$ ، $y = bv$ ، مساحت محصور به بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ را تعیین کنید. سپس حجم محصور به بیضی گوی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$ را با تبدیلی مشابه معین نمایید.

۵.۱۵ قضیه دیورژانس

مطلب را با نوشتن قضیه گرین

$$(1) \quad \int_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

به شکل برداری آغاز می کنیم. در اینجا C یک منحنی بسته ساده قطعۀ هموار است که یکبار در جهت خلاف عقربه های ساعت پیموده می شود، و $P = P(x, y)$ و $Q = Q(x, y)$ توابعی هستند که بر ناحیه مسطح کراندار R مرکب از منحنی C و درونش به طور پیوسته مشتق پذیرند. با معرفی میدان برداری دوبعدی $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ ، می بینیم که طرف چپ (۱) انتگرال خط $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ است (فرمول (۹)، صفحه ۱۴۳۴، را به یاد آورید). لذا، اگر به جای $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ بنویسیم $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}$ ، فرمول (۱) به شکل

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA,$$

یا معادلاً

$$(2) \quad \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA$$

در می آید. راه دیگر نوشتن (۲) عبارت است از

$$(2) \quad \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA,$$

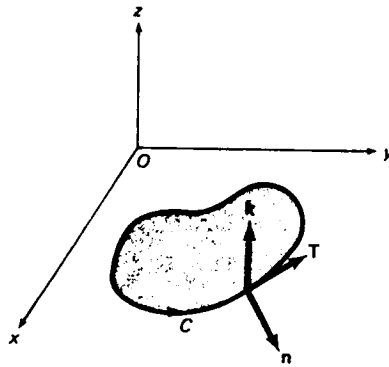
که در آن \mathbf{T} بردار یکه مماس به C می باشد (بحث بعد از فرمول (۱۲)، صفحه ۱۴۳۵، را به یاد بیاورید.)

اگر \mathbf{F} را نیرو تعبیر کنیم، فرمول (۲) به ما می گوید که کار انجام شده توسط \mathbf{F} بر ذره ای که C را می پیماید مساوی انتگرال مضاعف سمت راست (۲) است. مثلاً، از مثال ۱، صفحه ۱۴۸۳، معلوم می شود که کار انجام شده توسط نیروی $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (x + 2y)^2\mathbf{j}$ بر ذره ای که مثلث به رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 1)$ ، و $(0, 2)$ را در جهت خلاف عقربه های ساعت

می‌پیماید مساوی $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ است. توجه‌کنید هرگاه \mathbf{F} یک میدان بقا باشد، آنگاه $\partial F_2/\partial x = \partial F_1/\partial y$ و نیرو وقتی ذره C را می‌پیماید " کاری صورت نمی‌دهد".

حال شکل برداری جالب دیگری از قضیه گرین را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم \mathbf{n} قائم بیکه خارجی به منحنی C باشد. در این صورت، از شکل ۲۸ واضح است که $\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k}$ چون $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds$ نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{n} = \left(\frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j} \right) \times \mathbf{k} = \frac{dy}{ds} \mathbf{i} - \frac{dx}{ds} \mathbf{j}.$$



شکل ۲۸

انتگرال خط $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ را، که با طرف چپ (۲) در این فرق دارد که به جای \mathbf{T} در آن \mathbf{n} آمده است، می‌توان به صورت انتگرال مضاعفی روی ناحیه R محدود به C بیان کرد. در واقع،

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \int_C (F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j}) \cdot \left(\frac{dy}{ds} \mathbf{i} - \frac{dx}{ds} \mathbf{j} \right) ds = \int_C -F_2 dx + F_1 dy,$$

و در نتیجه، بنابر قضیه گرین (۱) به ازای $P = -F_2$ و $Q = F_1$ ، فوراً معلوم می‌شود که

$$(۳) \quad \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_R \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dA.$$

طرف چپ (۳) مشابه انتگرال شار $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ است، که در آن S یک سطح و \mathbf{F} یک میدان برداری سه‌بعدی می‌باشد (ر.ک. صفحه ۱۴۷۳). از اینروست که $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ را شار \mathbf{F} در امتداد C می‌نامند. برای تعبیر فیزیکی $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ ، فرض کنیم صفحه xy با لایه نازکی از یک مایع با ضخامتی نامحسوس پوشانده شده باشد که با سرعت $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y)$ در

حال حرکت است. در این صورت، شار \mathbf{F} در امتداد C مساحت خالص مایعی است که در امتداد C بر واحد زمان از داخل به خارج C جریان دارد. این را می‌توان با تعدیلهای مختصری در استدلال صفحات ۱۴۷۳ تا ۱۴۷۴، که به تعبیر فیزیکی شار $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$ در امتداد سطح S با شارشی فضایی به سرعت $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$ منجر شد، دید. بخصوص، سطح S و استوانه‌ء مایل شکل ۱۸ با منحنی C و متوازی‌الاضلاعی که یک ضلعش قوسی از C بوده و یک ساقش در امتداد $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y)$ است تعویض می‌شوند.

مثال ۱. شار میدان $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (x + 2y)^2\mathbf{j}$ را در امتداد مثلث C به رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 1)$ ، و $(0, 2)$ شکل ۲۲، صفحه ۱۴۸۳، پیدا نمایید.

حل. بنابر فرمول (۳) به ازای $F_1 = x^2 + y^2$ و $F_2 = (x + 2y)^2$ ، داریم

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \int_0^1 dx \int_x^{2-x} \left[\frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2) + \frac{\partial}{\partial y} (x + 2y)^2 \right] dy \\ &= \int_0^1 dx \int_x^{2-x} (6x + 8y) dy = 2 \int_0^1 \left[3xy + 2y^2 \right]_{y=x}^{2-x} dx \\ &= 2 \int_0^1 (8 - 2x - 6x^2) dx = 2 \left[8x - x^2 - 2x^3 \right]_0^1 = 10. \end{aligned}$$

دیورژانس یک میدان برداری. در فرمول (۳) انتگرالده مضاعف روی R دیورژانسن دو بعدی میدان $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}$ نام دارد و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}.$$

فرمول (۳) را می‌توان برحسب این کمیت به شکل زیر نوشت:

$$(۴) \quad \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA,$$

که قضیهٔ دیورژانسن دو بعدی نام دارد. بنابر (۴)، شار میدان \mathbf{F} در امتداد منحنی بستهٔ سادهٔ C مساوی انتگرال دیورژانسن آن روی ناحیهٔ R محدود به C می‌باشد.

به‌طور کلی، دیورژانسن میدان برداری سه بعدی $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(۵) \quad \operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

توجه کنید که عمل دیورژانس‌گیری، میدان برداری \mathbf{F} را به یک میدان اسکالر تبدیل می‌کند. این با عمل گرادیان‌گیری

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

که میدان اسکالر f را به یک میدان برداری تبدیل می‌کند تقابل دارد. همچنین، توجه کنید که اگر حاصل ضرب نقطه‌ای صوری عملگر دل

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

را در \mathbf{F} تشکیل دهیم، $\text{div } \mathbf{F}$ به دست می‌آید، چرا که

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

مثال ۲. $\text{div}(f\mathbf{F})$ را در صورتی حساب کنید که f یک تابع اسکالر مشتق‌پذیر بوده و $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$ یک میدان برداری مشتق‌پذیر باشد.

حل. بنابر تعریف (۵) و قاعده حاصل ضرب برای مشتق‌گیری، داریم

$$\begin{aligned} \text{div}(f\mathbf{F}) &= \frac{\partial(fF_1)}{\partial x} + \frac{\partial(fF_2)}{\partial y} + \frac{\partial(fF_3)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} F_1 + f \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} F_2 + f \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} F_3 + f \frac{\partial F_3}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} F_1 + \frac{\partial f}{\partial y} F_2 + \frac{\partial f}{\partial z} F_3 \right) + f \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) \\ &= (\text{grad } f) \cdot \mathbf{F} + f \text{div } \mathbf{F}, \end{aligned}$$

یا، به‌طور فشرده‌تر،

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = \nabla f \cdot \mathbf{F} + f \nabla \cdot \mathbf{F}.$$

حال نشان می‌دهیم که (۴) صورت دوبعدی قضیه همگرایی سه‌بعدی کلی‌تر می‌باشد.

قضیه ۷ (قضیه دیورژانس). فرض کنیم T ناحیه توپر متشکل از سطح بسته قطعه قطعه هموار S و درونش بوده، \mathbf{n} قائم یکه خارجی به S باشد، و $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$ یک

میدان برداری به طور پیوسته مشتقپذیر بر T باشد. در این صورت،

$$(۶) \quad \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV,$$

یعنی، شار \mathbf{F} در امتداد S مساوی انتگرال $\operatorname{div} \mathbf{F}$ روی ناحیه T است که به S محدود شده است!

برهان ناقص. قضیه را فقط در حالتی ثابت می‌کنیم که T ، x -ساده، y -ساده، و z -ساده، به صورت تعریف شده در صفحه ۱۳۴۰، باشد. برهان کامل در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته آمده است. با نوشتن فرمول (۶) به صورت زیر:

$$(۶') \quad \iint_S (F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_T \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dV,$$

معلوم می‌شود که قضیه در صورتی ثابت است که نشان دهیم

$$(۷) \quad \iint_S (F_1 \mathbf{i}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_T \frac{\partial F_1}{\partial x} dV,$$

$$(۸) \quad \iint_S (F_2 \mathbf{j}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_T \frac{\partial F_2}{\partial y} dV,$$

$$(۹) \quad \iint_S (F_3 \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_T \frac{\partial F_3}{\partial z} dV,$$

زیرا (۶') مجموع فرمولهای (۷) تا (۹) می‌باشد. هر سه فرمول به یک نحو ثابت می‌شوند؛ و لذا، کافی است فقط یکی از آنها، مثلاً " (۹) ، را ثابت کنیم.

برای این کار، ابتدا ملاحظه می‌کنیم که چون ناحیه T ، z -ساده، و S قطعه قطعه

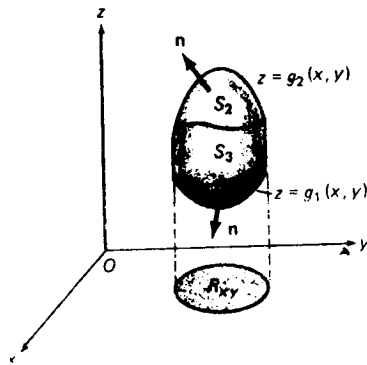
هموار است، T مجموعه‌ای است به شکل

$$\{(x, y, z): (x, y) \in R_{xy}, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\},$$

که در آن R_{xy} تصویر T روی صفحه xy بوده، و توابع g_1 و g_2 نمودارهای قطعه قطعه همواری دارند. لذا، T به شکل ۲۹ است که از سطح پایینی S_1 ، سطح بالایی S_2 ، و سطح جانبی S_3

۱. همچنین، به افتخار کارل فردریش گاوس (1777-1855) Carl Friedrich Gauss که بزرگترین

ریاضیدان عالم است، قضیه " گاوس نامیده می‌شود.



شکل ۲۹

تشکیل شده است که از پاره‌خطهایی موازی محور z تولید می‌شود. در بعضی حالات، مثلاً " کره، ممکن است S_3 غایب باشد، ولی S_3 سهمی در $\iint_S (F_3 \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} d\sigma$ ندارد، زیرا بردار \mathbf{n} بر S_3 موازی صفحه xy است؛ و در نتیجه، $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$. لذا، برای اثبات (۹)، کافی است نشان دهیم که

$$(9') \quad \iint_{S_1} (F_3 \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} d\sigma + \iint_{S_2} (F_3 \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_T \frac{\partial F_3}{\partial z} dV.$$

رابطه (۹') با استفاده از نتایج قبل به آسانی ثابت می‌شود. اولاً، " از قضیه ۵، صفحه ۱۳۴۵، معلوم می‌شود که

$$(10) \quad \begin{aligned} \iiint_T \frac{\partial F_3}{\partial z} dV &= \iint_{R_{xy}} dA \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \frac{\partial F_3(x, y, z)}{\partial z} dz \\ &= \iint_{R_{xy}} [F_3(x, y, g_2(x, y)) - F_3(x, y, g_1(x, y))] dA. \end{aligned}$$

ثانیاً، " بنا بر فرمول (۱۲)، صفحه ۱۴۷۵، به ازای $S = S_2$ ، $F_2 = 0$ ، $F_1 = 0$ ، $\mathbf{F} = F_3 \mathbf{k}$ ، $\mathbf{S} = S_2$ و $dx dy = dA$ ،

$$(11) \quad \iint_{S_2} (F_3 \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_{R_{xy}} F_3(x, y, g_2(x, y)) dA.$$

برای به دست آوردن فرمول نظیر برای S_1 ، باید \mathbf{n} را با \mathbf{n} عوض کنیم، زیرا قائم بکه خارجی

بر S_1 روبه پایین است در حالی که بر S_2 رو به بالا می‌باشد. از این نتیجه می‌شود که

$$\iint_{S_1} (F_3 \mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{n}) d\sigma = \iint_{R_{xy}} F_3(x, y, g_1(x, y)) dA,$$

یا معادلاً

$$(11') \quad \iint_{S_1} (F_3 \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = - \iint_{R_{xy}} F_3(x, y, g_1(x, y)) dA.$$

با افزودن (۱۱) به (۱۱')، معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} & \iint_{S_1} (F_3 \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} d\sigma + \iint_{S_2} (F_3 \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= \iint_{R_{xy}} [F_3(x, y, g_2(x, y)) - F_3(x, y, g_1(x, y))] dA, \end{aligned}$$

و از مقایسه این فرمول با (۱۰) رابطه (۹')، و در نتیجه (۹)، ثابت می‌شود. همانطور که قبلاً گفتیم، بقیه برهان عبارت است از اثبات فرمولهای (۷) و (۸) با استدلالهایی مشابه.

مثال ۳. در مثال ۸، صفحه 1475 ، شار میدان $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + x^2z^2\mathbf{k}$ خارج از سطح مکعبی S محدود به صفحات مختصات و صفحات $x=1$ ، $y=1$ ، و $z=1$ را با محاسبه مستقیم پیدا کردیم. این کمیت را با استفاده از قضیه دیورژانس حساب کنید.

حل. دیورژانس \mathbf{F} مساوی است با

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial(-yz)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2z^2)}{\partial z} = y^2 - z + 2x^2z,$$

و در نتیجه، طبق قضیه دیورژانس،

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iiint_T (y^2 - z + 2x^2z) dV,$$

که در آن T مکعب توپر محدود به S است. بنابراین،

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (y^2 - z + 2x^2z) \, dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 \left[y^2z - \frac{1}{2}z^2 + x^2z^2 \right]_{z=0}^1 dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 \left(y^2 - \frac{1}{2} + x^2 \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y + x^2y \right]_{y=0}^1 dx \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{6} + x^2 \right) dx = \left[-\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

که با مثال مذکور هماهنگی دارد. توجه کنید که چگونه قضیه دیورژانس نیاز به امتحان جداگانه رفتار $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ بر هر یک از شش وجه S را از بین می‌برد.

مثال ۴. شار میدان $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ خارج از کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ به شعاع a را بیابید.

حل. کره را با S و گوی $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ را با T نشان داده، قضیه دیورژانس را به کار می‌بریم. چون

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial(x^3)}{\partial x} + \frac{\partial(y^3)}{\partial y} + \frac{\partial(z^3)}{\partial z} = 3(x^2 + y^2 + z^2),$$

پس از تبدیل به مختصات کروی می‌بینیم که

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\phi \int_0^a (3\rho^2)\rho^2 \sin \phi \, d\rho \\ &= 6\pi \left(\int_0^\pi \sin \phi \, d\phi \right) \left(\int_0^a \rho^4 \, d\rho \right) = \frac{12}{5} \pi a^5. \end{aligned}$$

مثال ۵. شار میدان $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ خارج از سطح S و صادق در شرایط قضیه ۷ را بیابید.

حل. در اینجا

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial(yz)}{\partial x} + \frac{\partial(xz)}{\partial y} + \frac{\partial(xy)}{\partial z} = 0,$$

در نتیجه، اگر T ناحیهء محصور به S باشد، می توان فوراً نتیجه گرفت که

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iiint_T 0 dV = 0.$$

یک میدان یا دیورژانس صفر، مانند میدان \mathbf{F} در مثال قبل، را سلونوئیدی می نامند.

مثال ۶. شار میدان $\mathbf{F} = \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ خارج از سطح S صادق در شرایط قضیه ۷ را بیابید.

حل. این بار

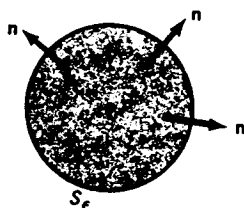
$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} dV \\ &= \iiint_T \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dV = 3 \iiint_T dV = 3V, \end{aligned}$$

که در آن V حجم ناحیهء T محصور به S است. با حل نسبت به V ، فرمول جالب

$$(12) \quad V = \frac{1}{3} \iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

به دست می آید که حجم یک جسم را برحسب شار بردار \mathbf{r} در امتداد سطحش بیان می کند.

تعبیر فیزیکی دیورژانس. حال دیورژانس را تعبیر فیزیکی می کنیم. فرض کنیم $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ میدان سرعت حالت پایدار یک مایع تراکم ناپذیر متحرک باشد، که در آن \mathbf{v} به طور پیوسته مشتق پذیر است. فرض کنیم $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{a}) > 0$. در نتیجه، دیورژانس \mathbf{v} در نقطهء P به بردار موضع \mathbf{a} مثبت است. فرض کنیم S_ε کره ای به شعاع ε و مرکز P با قائم یکهء خارجی \mathbf{n} بوده، و T_ε گوی محصور به S_ε باشد (ر.ک. شکل ۳۰). در این صورت، چون $\operatorname{div} \mathbf{v}$ پیوسته است



شکل ۳۰

(چرا؟) $\text{div } \mathbf{v}$ به ازای ε به قدر کافی کوچک بر T_ε مثبت می‌باشد. بنابراین، طبق قضیه دیورژانس،

$$(۱۳) \quad \iint_{S_\varepsilon} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_{T_\varepsilon} \text{div } \mathbf{v} dV$$

نیز مثبت است؛ در نتیجه، یک شارش روبه‌خارجی از مایع در امتداد S_ε وجود دارد. در این حالت گوییم شارش یک منبع در P دارد. به همین نحو، هرگاه $\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{a}) < 0$ ، آنگاه $\iint_{S_\varepsilon} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma < 0$ ؛ در نتیجه، یک شارش روبه داخلی از مایع در امتداد S_ε وجود دارد و گوییم شارش یک چاهک در P دارد. مثلاً، "فرض کنیم لوله‌ای از آب با چنان سرعتی پر شود که شیر زیر سطح آب قرار گیرد، ولی سطح آب به خاطر باز بودن فاضل‌آب ثابت بماند. در این صورت، شارش در حالت پایدار بوده و یک منبع در شیر و یک چاهک در فاضل‌آب دارد. در غیاب منبع یا چاهک داریم $\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{a}) = 0$ ، زیرا تراکم‌ناپذیری مایع از هر تجمع یا فقدان مایع داخل S_ε جلوگیری می‌کند.

از فرمول (۱۳) نتیجه جالب دیگری می‌توان به دست آورد. فرض کنیم V_ε حجم T_ε باشد. در این صورت، (۱۳) معادل است با

$$\frac{1}{V_\varepsilon} \iiint_{T_\varepsilon} \text{div } \mathbf{v} dV = \frac{1}{V_\varepsilon} \iint_{S_\varepsilon} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

که در آن عبارت سمت چپ مقدار میانگین یا متوسط \mathbf{v} روی ناحیه T_ε است (مسئله ۳۲، صفحه ۱۳۵۵، را به یاد بیاورید). اما وقتی $\varepsilon \rightarrow 0$ ، این مقدار متوسط به $\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{a})$ ، یعنی مقدار دیورژانس \mathbf{v} در P ، نزدیک می‌شود (چرا؟). بنابراین،

$$(۱۴) \quad \text{div } \mathbf{v}(\mathbf{a}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{V_\varepsilon} \iint_{S_\varepsilon} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

که تعبیر فارغ از مختصات دیورژانس \mathbf{v} در P به عنوان شار \mathbf{v} بر واحد حجم در P را به ما می‌دهد. بخصوص، اگر $\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{a})$ مثبت باشد، یک "دیورژانس" خالص یا شارش روبه‌خارج مایع از کره S_ε وجود خواهد داشت.

مسائل

دیورژانس میدان دو بعدی داده شده \mathbf{F} را بیابید.

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad ۰۱$$

$$F = \frac{-y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j} \quad . ۲$$

$$F = (\cos^2 xy) \mathbf{i} + (\sin^2 xy) \mathbf{j} \quad . ۳$$

$$F = (\cosh^2 xy) \mathbf{i} + (\sinh^2 xy) \mathbf{j} \quad . ۴$$

$$F = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) \mathbf{i} + \arctan(x/y) \mathbf{j} \quad . ۵$$

$$F = (x \ln |x|) \mathbf{i} + (y \ln |y|) \mathbf{j} \quad . ۶$$

دیورژانس میدان سه بعدی داده شده F را بیابید .

$$F = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} - z\mathbf{k} \quad . ۷$$

$$F = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k} \quad . ۸$$

$$F = xyz(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \quad . ۹$$

$$F = x^2yz\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k} \quad . ۱۰$$

$$F = \text{grad}(e^{x+y+z}) \quad . ۱۱$$

$$F = (\sin xy)\mathbf{j} + (\cos xz)\mathbf{j} + (\sinh yz)\mathbf{k} \quad . ۱۲$$

۱۳. $\text{div}(aF + bG)$ را در صورتی حساب کنید که a و b اسکالرهایی ثابتی باشند .

۱۴. دیورژانس گرادیان میدان اسکالر f لاپلاسین f نام دارد و با $\nabla^2 f$ نموده می شود .

لذا ،

$$\nabla^2 f = \text{div}(\text{grad } f) = \text{div}(\nabla f).$$

معادله $\nabla^2 f = 0$ معادله لاپلاس نام دارد ، و جوابهای این معادله توابع توافقی

خوانده می شوند (ر. ک. صفحه ۱۲۳۹) . نشان دهید که در بعد دو

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

ولی ، در بعد سه ،

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

۱۵. نشان دهید که تابع $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ همه جا جز در مبدا توافقی است .

۱۶. نشان دهید که تابع $f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ هیچ جا توافقی نیست . مسئله

۵۱ ، صفحه ۱۲۴۱ ، به زبان توابع توافقی چه می گوید ؟

۱۷. آیا تابع $f(x, y, z) = e^x(\sin y + \cos z)$ توافقی است ؟ جواب خود را شرح دهید .

۱۸. نشان دهید که $\text{div}(f\nabla f) = |\nabla f|^2 + f\nabla^2 f$.

۱۹. فرمول (۱۲) را برای کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ به شعاع a تحقیق کنید .

۲۰. شبیه دوبعدی فرمول (۱۲) را یافته، و آن را برای دایره $x^2 + y^2 = a^2$ به شعاع a تحقیق نمایید.

کمیات زیر را با استفاده از قضیه دیورژانس دوبعدی حساب کنید.

۲۱. شار میدان $F = 3xi - 2zj$ خارج از دایره $x^2 + y^2 = 2$

۲۲. شار میدان $F = x^2i + y^2zj$ خارج از مربع به رئوس $(0, \pm 1)$ و $(2, \pm 1)$

۲۳. فرض کنید $\partial f / \partial n$ مشتق تابع f از دو یا سه متغیر در جهت قائم بیکه خارجی \mathbf{n} به مسیر بسته C ساده یا سطح بسته S باشد (در نتیجه، $\partial f / \partial n = \nabla f \cdot \mathbf{n}$)، و نیز f بر C یا S مشتقات جزئی دوم پیوسته داشته باشد. نشان دهید

(یک)
$$\iint_R \nabla^2 f dA = \int_C \frac{\partial f}{\partial n} ds,$$

که در آن R ناحیه مسطح مرکب از مسیر C و درونش است، یا

(یک)
$$\iiint_T \nabla^2 f dV = \iint_S \frac{\partial f}{\partial n} d\sigma,$$

که در آن T ناحیه توپر مرکب از سطح S و درونش می باشد.

۲۴. فرمول (یک) را برای تابع $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$ و مکعب

$$T = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

تحقیق نمایید.

به کمک قضیه دیورژانس، شار میدان داده شده F خارج از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ را حساب کنید.

۲۵. $F = 4xi - 2yzj + k$

۲۶. $F = ai + bj + ck$ (a, b, c ثابت)

۲۷. $F = -y^2i + x^2zj + z^3k$

۲۸. $F = 2x^3i + y^3zj - z^2k$

با محاسبه طرفین معادله (۶)، قضیه دیورژانس را برای ناحیه توپر T و میدان F تحقیق کنید.

۲۹. $T = \{(x, y, z): x + y + z \leq a, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, $F = xi + yzj + zk$

۳۰. $T = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$, $F = x^3i + y^3zj + z^3k$

۳۱. $T = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$, $F = 3xi - y^2zj + z^2k$

۳۲. فرض کنید $f = f(x, y, z)$ و $g = g(x, y, z)$ دو تابع اسکالر با مشتقات دوم پیوسته بوده، و S ، \mathbf{n} ، و T همانند در قضیه دیورژانس باشند. اتحاد اول گرین را ثابت کنید:

$$\iiint_T (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dV = \iint_S f \nabla g \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

و، با استفاده از آن، اتحاد دوم گرین را اثبات نمایید:

$$\iiint_T (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV = \iint_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

۱۵.۶ قضیه استوکس^۱

کرل یک میدان برداری. از بخش اخیر به یاد می‌آورید که دیورژانس $\text{div } \mathbf{F}$ میدان برداری $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$ از حاصل ضرب نقطه‌ای عملگر ∇ در \mathbf{F} تشکیل می‌شود. حال کرل \mathbf{F} را در نظر می‌گیریم که از حاصل ضرب خارجی ∇ در \mathbf{F} تشکیل می‌شود. لذا،

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}) \\ (1) \quad &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}, \end{aligned}$$

که می‌توان آن را به طور فشرده‌تر زیر نوشت:

$$(1') \quad \text{curl } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}.$$

این یک دترمینان عددی معمولی نیست، زیرا اولین سطرش از بردارها، دومین سطرش از عملگرهای دیفرانسیل جزئی، و سومین سطرش از توابع اسکالر تشکیل شده است، ولی این راه ساده‌ای برای به خاطر آوردن طرف راست فرمول (۱) است. توجه کنید که عمل کرل‌گیری یک میدان برداری را به میدان برداری دیگری تبدیل می‌کند.

مثال ۱. $\text{curl}(\text{grad } f)$ را در صورتی حساب کنید که f یک میدان اسکالر بامشتقات جزئی اول و دوم پیوسته باشد.

حل. چون

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k},$$

از فرمول (۱) معلوم می شود که

$$\text{curl} (\text{grad } f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{k}.$$

اما عبارت داخل هر پرانتز در سمت راست صفر است (چرا؟)؛ و لذا،

$$\text{curl} (\text{grad } f) = \nabla \times \nabla f = \mathbf{0}.$$

یک میدان با کرل صفر، مانند هر میدان گرادیان به طور پیوسته مشتق پذیر، غیردورانی نام دارد (دلیلش ذیلا "آورده می شود). حال، با معرفی کرل میدان \mathbf{F} ، می توان قضیه استوکس را بیان کرد. این تعمیم سه بعدی قضیه گرین است به شکل زیر:

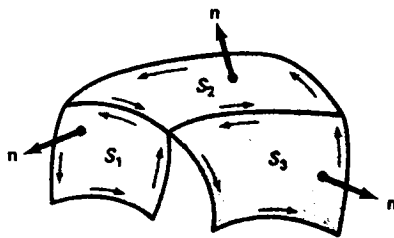
$$(۲) \quad \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA,$$

درست مثل قضیه دیورژانس که تعمیم سه بعدی قضیه گرین به شکل

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_R \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dA$$

می باشد (بحث آغازین بخش ۵.۱۵ را به یاد آورید). در فرمول (۲)، منحنی مسطح بسته ساده C که ناحیه R را محدود می کند در جهت خلاف عقربه های ساعت پیموده می شود، که جهت مثبت به صورت تعریف شده در صفحه ۴۸۴ است، به این معنی که R همواره سمت چپ ناظری است که در امتداد C در این جهت حرکت می کند. به طور کلی، اگر سطح هموار S مجهز به یک میدان از قائمهای یکه \mathbf{n} به یک منحنی فضایی بسته ساده محدود شده باشد، جهت مثبت پیمایش C "القا شده به وسیله \mathbf{n} " جهتی تعریف می شود که S همواره سمت چپ ناظری باشد که در حال پیمودن C سرش در جهت \mathbf{n} باشد. اگر S هموار نبوده بلکه فقط قطعه قطعه هموار باشد، در نتیجه S از m زیر سطح هموار S_1, \dots, S_m تشکیل شده باشد که در امتداد بخشهایی از منحنیهای مرزی C_1, \dots, C_m بهم وصل اند، انتساب قائم یکه \mathbf{n} به زیر سطوح S_1, \dots, S_m چنان است که جهت های القا شده C_1, \dots, C_m ویژگی زیر را دارا می باشند؛ هر قوس از C_1, \dots, C_m که دوزیر سطح مجاور در آن شریک اند دوبار پیموده می شود، در هر جهت یکبار، و قوسهای باقیمانده "باهم جور شده" منحنی C

تشکیل می‌دهند که سطح S را محدود می‌سازد (منحنی C بخشی از S در نظر گرفته می‌شود) این امر در شکل ۳۱ برای سه زیر سطح S_1, S_2, S_3 ، و توضیح داده شده است. توجه کنید هرگاه n یک قائم یکه به S باشد n - انتخاب دیگری از قائم یکه (و تنها انتخاب دیگر) می‌باشد .



یک سطح قطعه قطعه هموار

شکل ۳۱

قضیه ۸ (قضیه استوکس)^۱ . فرض کنیم S یک سطح قطعه قطعه هموار باشد که به منحنی بسته ساده قطعه قطعه هموار C محدود شده است، و قائم یکه n به S را اختیار می‌کنیم. همچنین C در جهت مثبت (جهت القا شده به وسیله n) پیموده شده، و $F = F_1i + F_2j + F_3k$ یک میدان برداری به طور پیوسته مشتق پذیر بر S باشد. در این صورت،

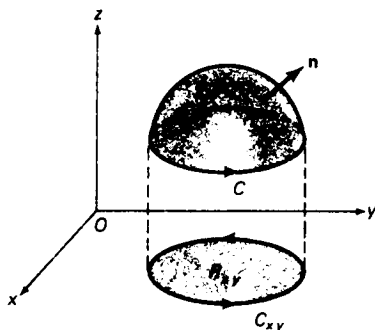
$$(۳) \quad \int_C F \cdot dr = \iint_S (\text{curl } F) \cdot n \, d\sigma.$$

در این صورت، گردش F حول C مساوی شار گول F در امتداد S می‌باشد.

برهان ناقص (اختیاری) . برهان کامل قضیه استوکس در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته مطرح می‌شود؛ و لذا، قضیه را فقط در حالت خاص شکل ۳۲ ثابت می‌کنیم، که در آن S نمودار تابعی چون $z = z(x, y)$ است با مشتقات جزئی دوم پیوسته که بر ناحیه ساده R_{xy} در صفحه xy که مرز منحنی بسته ساده قطعه قطعه هموار C_{xy} است تعریف شده

۱. به افتخار سیر جرج گابریل استوکس Sit George Gabriel Stokes استاد ریاضیات دانشگاه کمبریج، که قضیه را پس از اینکه در ۱۸۵۰ از سوی فیزیکدان برجسته، ویلیام تامسون William Thomson که بیشتر به لرد کلوین Lord Kelvin معروف است، به وی پیشنهاد شد مورد بررسی قرار داد.

است. البته، ناحیه R_{xy} و منحنی مرز C_{xy} تصاویر سطح S و مرز منحنی C روی صفحه xy اند. همچنین، فرض است که \mathbf{n} قائم بیکه xy باشد.



شکل ۳۲

طرف چپ (۳) مساوی است با

$$(۴) \quad \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz.$$

با استفاده از فرمول (۱۲)، صفحه ۱۴۷۵، به ازای $\text{curl } \mathbf{F}$ در جای \mathbf{F} ، معلوم می شود که طرف راست (۳) برابر است با

$$(۵) \quad \begin{aligned} \iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \iint_{R_{xy}} \left[-(\text{curl } \mathbf{F})_1 \frac{\partial z}{\partial x} - (\text{curl } \mathbf{F})_2 \frac{\partial z}{\partial y} + (\text{curl } \mathbf{F})_3 \right] dx \, dy \\ &= \iint_{R_{xy}} \left[\left(\frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial y} \right) \frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \right] dx \, dy. \end{aligned}$$

از مقایسه (۴) و (۵) معلوم می شود که فرمول (۳) در صورتی برقرار است که نشان دهیم

$$(۶) \quad \int_C F_1 dx = - \iint_{R_{xy}} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx \, dy,$$

$$(۷) \quad \int_C F_2 dy = \iint_{R_{xy}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial x} \right) dx \, dy,$$

$$(۸) \quad \int_C F_3 dz = \iint_{R_{xy}} \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial F_3}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx \, dy,$$

زیرا (۳) مجموع فرمولهای (۶) تا (۸) می باشد .

برای اثبات این فرمولها ، فرض کنیم منحنی C_{xy} در جهت مثبت پیموده شده و به معادلات پارامتری $x = x(t)$ ، $y = y(t)$ ($a \leq t \leq b$) در این صورت ، C منحنی مرزی سطح S به معادلات پارامتری زیر است :

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(x(t), y(t)) \quad (a \leq t \leq b),$$

و این نیز در جهت مثبت پیموده می شود . لذا ، برحسب تابع مرکب $G(x, y) = F_1(x, y, z(x, y))$

$$\begin{aligned} \int_C F_1 dx &= \int_a^b F_1(x(t), y(t), z(x(t), y(t))) \frac{dx}{dt} dt \\ (9) \quad &= \int_a^b G(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} dt = \int_{C_{xy}} G dx. \end{aligned}$$

بنابر قضیه گرین (۱) ، صفحه ۱۴۸۵ ، به ازای $P = G$ ، $Q = 0$ ، $R = R_{xy}$ ، $C = C_{xy}$ ، $dA = dx dy$ ، با اعمال قاعده زنجیره ای ،

$$(9') \quad \int_{C_{xy}} G dx = - \iint_{R_{xy}} \frac{\partial G}{\partial y} dx dy = - \iint_{R_{xy}} \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy.$$

از مقایسه (۹) و (۹') ، فرمول (۶) به دست می آید ، و فرمول (۷) اساساً " به همین نحو ثابت می شود (شرح دهید) .

حال ، برای تکمیل برهان ، فرمول (۸) را تحقیق می کنیم . در اینجا ، برحسب تابع مرکب $H(x, y) = F_3(x, y, z(x, y))$

$$\begin{aligned} \int_C F_3 dz &= \int_a^b F_3(x(t), y(t), z(x(t), y(t))) \frac{dz(x(t), y(t))}{dt} dt \\ (10) \quad &= \int_a^b H(x(t), y(t)) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) dt \\ &= \int_{C_{xy}} H \frac{\partial z}{\partial x} dx + H \frac{\partial z}{\partial y} dy. \end{aligned}$$

مجدداً " ، طبق قضیه گرین ، پس از اعمال قاعده زنجیره ای ،

$$\begin{aligned} \int_{C_{xy}} H \frac{\partial z}{\partial x} dx + H \frac{\partial z}{\partial y} dy &= \iint_{R_{xy}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] dx dy \\ &= \iint_{R_{xy}} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + H \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} - H \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right) dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_{R_{xy}} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx dy \\
 &= \iint_{R_{xy}} \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial z}{\partial y} \right. \\
 (10') \quad &\quad \left. - \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial z}{\partial x} \right] dx dy \\
 &= \iint_{R_{xy}} \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial F_3}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx dy
 \end{aligned}$$

(کجا در آن از فرض پیوسته بودن جزئیهای دوم $z(x, y)$ استفاده شد؟) . از مقایسه (۱۰) با (۱۰') رابطه (۸) به دست آمده، بدین وسیله برهان قضیه استوکس برای این حالت خاص کامل می شود.

برای آنکه قضیه گرین به شکل برداری (۲) را از قضیه استوکس (۳) به دست آوریم، سطح S را ناحیه R در صفحه xy می گیریم که مرز آن منحنی C بوده و دارای قائم یکه بالایی ثابتی مساوی بردار پایه \mathbf{k} باشد، و نیز $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}$ یک میدان به طور پیوسته مشتق پذیر در C در صفحه باشد. در این صورت، جهت مثبت S خلاف عقربه های ساعت است، کرل \mathbf{F} به

$$\text{curl } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

ساده می شود، و $d\sigma = dA$ (چرا؟) . لذا، قضیه استوکس فوراً " به قضیه گرین بدل می شود:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} d\sigma = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA .$$

مثال ۲. قضیه استوکس را برای میدان $\mathbf{F} = -2z\mathbf{i} + 3xz\mathbf{j} + 4y\mathbf{k}$ تحقیق کنید، که در آن $z = 1 - x^2 - y^2$ ($z \geq 0$) با قائم یکه بالایی \mathbf{n} است که مرز C دایره $x^2 + y^2 = 1$ در صفحه xy می باشد (ر. ک. شکل ۱۹، صفحه ۱۴۷۴).

$$\text{curl } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -2z & 3x & 4y \end{vmatrix} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

از فرمول (۵) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \iint_R [(-4)(-2x) + 2(-2y) + 3] \, dx \, dy \\ &= \iint_R (8x - 4y + 3) \, dx \, dy, \end{aligned}$$

که در آن R قرص $x^2 + y^2 \leq 1$ می‌باشد. لذا، با تبدیل به مختصات قطبی، داریم

$$\begin{aligned} \iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (8r \cos \theta - 4r \sin \theta + 3)r \, dr \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{8}{3} r^3 \cos \theta - \frac{4}{3} r^3 \sin \theta + \frac{3}{2} r^2 \right]_{r=0}^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{8}{3} \cos \theta - \frac{4}{3} \sin \theta + \frac{3}{2} \right) d\theta = 3\pi. \end{aligned}$$

و اما در مورد انتگرال خط $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ، چون C دایره $x^2 + y^2 = 1$ در صفحه xy است، داریم

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C -2z \, dx + 3x \, dy + 4y \, dz = \int_C 3x \, dy \\ (z = dz = 0) \end{aligned}$$

لذا، طبق نتیجه ۱ از قضیه گرین (ر.ک. صفحه ۱۴۸۲)،

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 3 (\text{مساحت } R) = 3\pi$$

و در نتیجه، $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ مساوی است با $\iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$ ، که با قضیه استوکس هماهنگی دارد.

مثال ۳. قضیه استوکس را برای میدان $\mathbf{F} = \mathbf{i} + x^3 y^2 \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ تحقیق کنید، که در آن کره $4x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ($z \geq 0$) بوده و \mathbf{n} قائم یکه بالایی S می‌باشد.

حل. این امر که \mathbf{n} در امتداد لبه S ، یعنی بیضی $4x^2 + y^2 = 4$ در صفحه xy ، افقی است،

به تبدیل مختصری از برهان ناقص قضیه استوکس منجر می شود، که در آن S با S_+ ، یعنی نمودار

$$4x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad (z \geq \varepsilon > 0),$$

تعویض، محاسبات تکرار، و سپس فرض می شود که $\varepsilon \rightarrow 0$ ، ولی اعتبار قضیه خدشه دار نمی شود. چون

$$\text{curl } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1 & x^3 y^2 & z \end{vmatrix} = 3x^2 y^2 \mathbf{k},$$

از فرمول (۵) معلوم می شود که

$$\begin{aligned} \iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \iint_R 3x^2 y^2 \, dx \, dy = 6 \int_{-1}^1 dx \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} x^2 y^2 \, dy \\ &= 6 \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{3} x^2 y^3 \right]_{y=0}^{2\sqrt{1-x^2}} dx = 16 \int_{-1}^1 x^2 (1-x^2)^{3/2} dx, \end{aligned}$$

که در آن R ناحیه بیضوی $4x^2 + y^2 \leq 4$ در صفحه xy است. با جانشانی $x = \sin t$ معلوم می شود که

$$(11) \quad \iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 32 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \sin^2 t \, dt.$$

و اما راجع به انتگرال خط $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ، چون C بیضی $4x^2 + y^2 = 4$ در صفحه xy به معادلات پارامتری $x = \cos t$ ، $y = 2 \sin t$ ، $z = 0$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) است، داریم

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C dx + x^3 y^2 dy + z dz = \int_0^{2\pi} (-\sin t + 8 \cos^4 t \sin^2 t) dt \\ (11') \quad &= 8 \int_0^{2\pi} \cos^4 t \sin^2 t \, dt = 32 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \sin^2 t \, dt \end{aligned}$$

(آخرین مرحله را توجیه کنید). از مقایسه (۱۱) و (۱۱')، قضیه استوکس در این حالت تأیید می شود، و این کار بدون محاسبه انتگرال $\int_0^{\pi/2} \cos^4 t \sin^2 t \, dt$ ، که به کمک مثال ۳، صفحه ۶۱۷، می تواند دید مساوی $\pi/32$ است، صورت گرفته است.

فرض کنیم $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$ یک میدان برداری به طور پیوسته مشتقپذیر باشد.

ما قبلاً از قضیه ۲، صفحه ۱۴۵۱، که در آن به جای P ، Q ، و R بنویسیم F_1 ، F_2 ، و F_3 ، می‌دانیم هرگاه F میدان گرادیان باشد، آنگاه

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x},$$

که با $\text{curl } F = 0$ معادل است. به عکس، فرض کنیم در هر نقطه از قلمرو سه‌بعدی D ، $\text{curl } F = 0$ ؛ در نتیجه، F بر D غیردورانی است، و D را چنان می‌گیریم که هر مسیر بسته ساده C واقع در D مرز سطح قطعه قطعه هم‌سوار S باشد که در D جا دارد؛ یک چنین قلمرو را همبند ساده می‌نامیم^۱. در این صورت، بر S ، $\text{curl } F = 0$ ، و در نتیجه، بنا بر قضیه استوکس،

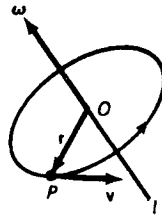
$$\int_C F \cdot dr = \iint_S (\text{curl } F) \cdot n \, d\sigma = \iint_S 0 \cdot n \, d\sigma = 0.$$

بنابراین، به ازای هر مسیر بسته ساده واقع در D ، $\int_C F \cdot dr = 0$. پس از تبصره^۶ صفحه ۱۴۴۹ در مورد میدانهای دوبعدی و سه‌بعدی نتیجه می‌شود که انتگرال خط F بر D از مسیر مستقل است، یا معادلاً^۷ بر D میدان گرادیان است. این صورت سه‌بعدی نتیجه^۶ ۲ از قضیه^۶ گرین، صفحه ۱۴۸۰، می‌باشد.

تعبیر فیزیکی کرل. برای توضیح معنی فیزیکی کرل، فرض کنیم ناحیه‌ای در فضا را با مایعی پر کرده باشیم که با تندی زاویه‌ای ثابت ω (ر.ک. ص ۱۱۰۸) حول محور I دوران نماید (ر.ک. ص ۱۱۰۸)، و مبدأ O را مرکز دایره رسم شده توسط ذره چرخان P از مایع، مانند شکل ۳۳، می‌گیریم. اسکالر ω جهت دوران را به ما نمی‌گوید؛ و در نتیجه، بردار ω به اندازه^۸ ω را معرفی می‌کنیم که در امتداد I بوده و در جهتی باشد که دوران در چشم ناظری واقع در نوک ω خلاف جهت عقربه‌های ساعت باشد. سرعت معمولی (انتقالی) ذره P بر حسب این بردار (به نام سرعت زاویه‌ای) مساوی است با

$$v = \omega \times r, \quad (12)$$

۱. این تعریف اساساً همان تعریف قلمرو دوبعدی همبند ساده است که در صفحه ۱۴۴۴ داده شده است (ناحیه مسطح را مرکب از منحنی بسته ساده C و درونش به عنوان سطح با مرز C تجسم نمایید). اما یک قلمرو همبند ساده در فضا می‌تواند حفره داشته باشد؛ مثلاً، قلمرو بین دو کره متحد‌المرکز همبند ساده است. به عنوان یک قلمرو سه‌بعدی همبند چندگانه (یعنی همبند ساده نباشد)، می‌توان چنبره را در نظر گرفت.



شکل ۳۳

که در آن $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ بردار موضع P می‌باشد. در واقع، همانطور که از شکل واضح است، \mathbf{v} بر هر دوی ω و \mathbf{r} عمود بوده، و بردارهای ω ، \mathbf{v} و \mathbf{r} یک دستگاه راست دست تشکیل می‌دهند (برای مشاهده این امر، نقطه شروع \mathbf{v} را در O قرار دهید). لذا، \mathbf{v} و $\omega \times \mathbf{r}$ همجهت می‌باشند. ولی \mathbf{v} و $\omega \times \mathbf{r}$ هم اندازه نیز هستند، زیرا \mathbf{r} برهم عمودند؛ در نتیجه، $|\omega \times \mathbf{r}| = \omega|\mathbf{r}|$ ، و ما از صفحه ۱۱۰۸ می‌دانیم که $|\mathbf{v}| = \omega|\mathbf{r}|$. این رابطه (۱۲) را ثابت می‌کند، و اگر O هر نقطه دیگر محور I گرفته شود، این فرمول باز هم برقرار است (چرا؟).

حال کرل میدان سرعت (۱۲) را حساب می‌کنیم. فرض کنیم

$$\omega = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}$$

در این صورت،

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} \\ &= (\omega_2z - \omega_3y)\mathbf{i} + (\omega_3x - \omega_1z)\mathbf{j} + (\omega_1y - \omega_2x)\mathbf{k} \end{aligned}$$

در نتیجه،

$$\text{curl } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_2z - \omega_3y & \omega_3x - \omega_1z & \omega_1y - \omega_2x \end{vmatrix} = 2\omega_1\mathbf{i} + 2\omega_2\mathbf{j} + 2\omega_3\mathbf{k} = 2\omega.$$

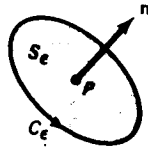
لذا، کرل میدان سرعت یک مایع چرخان، صرف نظر از عامل ۲، همان سرعت زاویه‌ای مایع می‌باشد. این نشان می‌دهد که $\text{curl } \mathbf{v}$ "تمایل دورانی" میدان سرعت \mathbf{v} را سنجیده، و دلیل اینکه یک میدان با کرل صفر را "غیردورانی" نامند توضیح می‌دهد.

انتگرالهای خط و سطح ۱۵۲۱

روش جالب دیگری نیز برای تعبیر کرل وجود دارد. فرض کنیم S_ε قرصی به شعاع ε باشد که در میدان سرعت حالت پایدار $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ فرورفته است، و مرکز S_ε در نقطه P به بردار شعاعی \mathbf{n} باشد. در این صورت، طبق قضیه استوکس،

$$(۱۳) \quad \iint_{S_\varepsilon} (\text{curl } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{C_\varepsilon} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r},$$

که در آن S_ε قائم بیکه \mathbf{n} داشته و C_ε مرز مستدیر S_ε باشد که در جهت مثبت نسبت به \mathbf{n} پیموده می‌شود (ر.ک. شکل ۳۴). فرض کنیم A_ε مساحت S_ε باشد. در این صورت، فرمول



شکل ۳۴

(۱۳) معادل است با

$$\frac{1}{A_\varepsilon} \iint_{S_\varepsilon} (\text{curl } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \frac{1}{A_\varepsilon} \int_{C_\varepsilon} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r},$$

که در آن $\int_{C_\varepsilon} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ گردش \mathbf{v} حول C_ε بوده (صفحه ۱۴۴۹ را به یاد آورید)، و عبارت سمت چپ مقدار میانگین یا متوسط $(\text{curl } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}$ روی قرص S_ε است. اما وقتی $\varepsilon \rightarrow 0$ ، این متوسط به $(\text{curl } \mathbf{v}(\mathbf{a})) \cdot \mathbf{n}$ ، یعنی مولفه کرل \mathbf{v} در P روی \mathbf{n} ، نزدیک می‌شود. بنابراین،

$$(\text{curl } \mathbf{v}(\mathbf{a})) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{A_\varepsilon} \int_{C_\varepsilon} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r},$$

که تعبیر فارغ از مختصات مولفه کرل \mathbf{v} در P روی \mathbf{n} را به عنوان گردش \mathbf{v} بر واحد مساحت در صفحه مار بر P و عمود بر \mathbf{n} به ما می‌دهد. این فرمول را با فرمول (۱۴)، صفحه ۱۵۰۸ برای دیورژانس \mathbf{v} در P مقایسه نمایید.

مسائل

کرل میدان برداری \mathbf{F} را پیدا نمایید.

$\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ ۰۲

$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ۰۱

۳. $F = (y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$

۴. $F = (x - y)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (x - z)\mathbf{k}$

۵. $F = (y\mathbf{i} - x\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$

۶. $F = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

۷. $F = x\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$

۸. $F = z^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + x^3\mathbf{k}$

۹. $F = ye^z\mathbf{i} + xe^z\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

۱۰. $F = (\sin y)\mathbf{i} + (\cos x)\mathbf{j} + (\sin xy)\mathbf{k}$

۱۱. $\operatorname{div}(\operatorname{curl} F)$ را با فرض اینکه F مشتقات جزئی دوم پیوسته دارد حساب کنید.

۱۲. فرض کنید f یک میدان اسکالر مشتقپذیر و F یک میدان برداری مشتقپذیر باشد. نشان دهید که

$$\operatorname{curl}(fF) = \operatorname{grad} f \times F + f \operatorname{curl} F = \nabla f \times F + f \nabla \times F$$

(به تشابه این با مثال ۲، صفحه ۱۵۰۲، توجه کنید) .

فرض کنید F و G توابع برداری مشتقپذیری باشند. نشان دهید که

۱۳. $\operatorname{div}(F \times G) = G \cdot \operatorname{curl} F - F \cdot \operatorname{curl} G$

۱۴. $\operatorname{curl}(aF + bG) = a \operatorname{curl} F + b \operatorname{curl} G$ (a و b ثابتهای اسکالر هستند)

قضیه استوکس را برای میدان برداری F و سطح S داده شده تحقیق نمایید. در هر حالت، \mathbf{n} را قائم یکه بالایی بگیرید.

۱۵. $F = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} - y\mathbf{k}$ ، S نمودار $z = x$ روی مستطیل $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ است

۱۶. $F = (x^2 + x)\mathbf{i} + 3xyz\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k}$ ، S نیمکره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ($z \geq 0$) است

۱۷. $F = e^x\mathbf{i} + e^y\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$ ، S همان عرقچین سهموی مثال ۲ است

۱۸. $F = -y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ، S ناحیه بیضوی است که در آن صفحه $x + y + z = 2$

استوانه $x^2 + y^2 = 1$ را قطع می کند

با استفاده از قضیه استوکس، انتگرال $\int_C F \cdot d\mathbf{r}$ را در صورتی حساب کنید که $F = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ و C منحنی داده شده باشد.

۱۹. C مثلثی به رئوس $(0, 0, 3)$ ، $(1, 0, 3)$ ، و $(2, 1, 3)$ است که به همین ترتیب پیوسته می شود

۲۰. C دایره‌ای است که در آن صفحه $z = y$ کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ قطع می کند و از محور

z مثبت دیده می شود که پیمایش آن خلاف جهت عقربه‌های ساعت صورت می گیرد

فرض کنید f و g میدانهای اسکالر در فضا و با مشتقات جزئی دوم پیوسته بوده، و S ، C ،

و \mathbf{n} همانند قضیه استوکس باشند. نشان دهید که

$$\int_C f \nabla g \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad ۲۱$$

$$\int_C (f \nabla g + g \nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad ۲۲$$

۲۳. فرض کنید C یک منحنی بسته ساده، قطعه قطعه هموار و مرز مشترک دو سطح قطعه قطعه هموار S_1 و S_2 با قائمهای \mathbf{n}_1 و \mathbf{n}_2 باشد، و نیز

$$I_1 = \iint_{S_1} (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}_1 d\sigma, \quad I_2 = \iint_{S_2} (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}_2 d\sigma$$

که در آنها \mathbf{F} یک میدان برداری به طور پیوسته مشتقپذیر بر هر دوی S_1 و S_2 است. نشان دهید اگر جهت پیمایش C القا شده توسط \mathbf{n}_1 و \mathbf{n}_2 یکسان باشد، $I_1 = I_2$ ؛ در غیر این صورت، $I_1 = -I_2$.

۲۴. فرض کنید سطح S در قضیه استوکس بسته باشد؛ در نتیجه، منحنی مرزی S_1 وجود ندارد. نشان دهید که در این حالت

$$\iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0.$$

۲۵. فرض کنید $\mathbf{F} = -y^2\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ ، و S سطح مکعبی شکل ۱۵، صفحه ۱۴۷۰، باشد منتها وجه جلوی S_1 آن برداشته شده است، و \mathbf{n} را قائم بیکه خارجی S بگیرید. شار کرل \mathbf{F} در امتداد S را با محاسبه گردش \mathbf{F} حول مرز S مستقیماً حساب کنید، و نیز، با استفاده از مسئله ۲۳، شار را به صورت انتگرالی روی وجه غایب بیان دارید.

۲۶. با فرض پیوسته بودن مشتقات جزئی دوم پیوسته F ، نشان دهید که

$$\text{curl}(\text{curl } \mathbf{F}) = -\nabla^2 \mathbf{F} + \text{grad}(\text{div } \mathbf{F}) \quad (\text{یک})$$

(عبارت $\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla^2(F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k})$ را به صورت $\nabla^2 F_1\mathbf{i} + \nabla^2 F_2\mathbf{j} + \nabla^2 F_3\mathbf{k}$ تعبیر نمایید.)

۲۷. $\text{curl}(\text{curl } \mathbf{F})$ را به ازای $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + 2xz\mathbf{j} - 3yz\mathbf{k}$ هم مستقیماً و هم با استفاده از فرمول (یک) حساب کنید.

۲۸. فرض کنید T ، S ، و \mathbf{n} همانند قضیه دیورژانس (ر.ک. صفحه ۱۵۰۲) بوده، و \mathbf{G} یک میدان برداری به طور پیوسته مشتقپذیر بر T باشد. نشان دهید که

$$\iint_S \mathbf{n} \times \mathbf{G} d\sigma = \iiint_T \text{curl } \mathbf{G} dV.$$

راهنمایی. در قضیه دیورژانس قرار دهید $\mathbf{F} = \mathbf{G} \times \mathbf{c}$ ، که در آن \mathbf{c} بردار ثابتی است. انتگرالهای سطح و حجم میدانهای برداری را مؤلفه به مؤلفه تعبیر نمایید؛ مثلاً،

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \, d\sigma &= \iint_S (F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}) \, d\sigma \\ &= \left(\iint_S F_1 \, d\sigma \right) \mathbf{i} + \left(\iint_S F_2 \, d\sigma \right) \mathbf{j} + \left(\iint_S F_3 \, d\sigma \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

اصطلاحات و مباحث کلیدی

انتگرالهای خط نسبت به طول قوس

انتگرالهای خط نسبت به مختصات

منحنیهای قطعه قطعه هموار، قلمروهای همبند ساده و چندگانه

انتگرالهای خط مستقل از مسیر، میدانهای گرادیان

انرژی پتانسیل، بقای انرژی، میدانهای بقا

توصیف میدانهای گرادیان

مساحت سطح و انتگرالهای سطح

قائمهای یک به سطح، سطوح قطعه قطعه هموار

شار یک میدان برداری در امتداد سطح

قضیه گرین و موارد استعمال آن

تبدیلات مختصات و ژاکوبیها

تغییر متغیر در انتگرالهای چندگانه

شکلهای برداری قضیه گرین

دیورژانس و کرل یک میدان برداری

قضیه دیورژانس و قضیه استوکس

مسائل تکمیلی

انتگرال خط داده شده از نوع $\int_C f(\mathbf{r}) \, ds$ را حساب کنید.

۱. که در آن C قوس بیضوی $x = 3 \cos t, y = 2 \sin t$ ($0 \leq t \leq \pi/2$) است $\int_C xy \, ds$

۲. که در آن C دایره $x^2 + y^2 = 2y$ است که یکبار در جهت خلاف $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} \, ds$

عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود.

۳. $\int_C x\sqrt{x^2 - y^2} ds$ ، که در آن C حلقهٔ راست‌لمنیسکات $r^2 = 4 \cos 2\theta$ ($-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$) است

۴. $\int_C \frac{ds}{x^2 + y^2 + z^2}$ ، که در آن C قوس مارپیچی $x = \cos t, y = \sin t, z = t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) است

۵. یک ذرهٔ متحرک در امتداد دایرهٔ $x^2 + y^2 = R^2$ به شعاع R و در جهت خلاف عقربه‌های ساعت تحت اثر نیروی ثابتی به اندازهٔ F که در امتداد محور مثبت است قرار دارد. کار این نیرو بر ذره را وقتی ذره قوسی از دایره که در ربع‌های اول و دوم است می‌پیماید پیدا نمایید. این کار وقتی ذره با شروع از نقطه‌ای یک‌دور کامل را می‌پیماید چقدر است؟

۶. اندازهٔ نیرویی با فاصلهٔ بین نقطهٔ اثرش و صفحهٔ xy نسبت عکس داشته و ثابت تناسب a می‌باشد. فرض کنید نیرو همیشه از مبدأ دور شود. کار این نیرو بر ذرهٔ متحرکی از $A = (1, 2, 2)$ تا نقطهٔ $B = (2, 4, 4)$ در امتداد پاره خط AB را بیابید.

۷. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ را در صورتی حساب کنید که $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ و C پاره خط واصل بین مبدأ و نقطهٔ (a, a, a) باشد.

۸. انتگرال خط

$$\int_C \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$$

را در صورتی حساب کنید که C ستاره‌گون $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) باشد که یک بار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است.

۹. انتگرال خط $\int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$ را در صورتی حساب کنید که C منحنی $x = t, y = t^2, z = t^3$ ($0 \leq t \leq 1$) باشد.

۱۰. فرض کنید $f(x)$ بر $(-\infty, \infty)$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد. نشان دهید که میدانهای برداری $\mathbf{F}(x, y) = f(x^2 + y^2)(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$ و $\mathbf{G}(x, y) = f(xy)(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$ هر دو میدانهای بقا هستند.

آیا میدان برداری $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ به مؤلفه‌های داده شده $P = P(x, y)$ و $Q = Q(x, y)$ میدان گرادینان است؟ اگر چنین است، تابع U و قلمرو D را طوری بیابید که بر آن $\mathbf{F} = \text{grad } U$.

۱۱. $P = (x^2 + xy + y^2)x, Q = (x^2 - xy + y^2)y$

$$P = \cosh x + \cosh y, Q = x \sinh y \quad \cdot 12$$

$$P = e^{x+y} - \sin(x-y), Q = e^{x+y} + \sin(x-y) \quad \cdot 13$$

$$P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, Q = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \quad \cdot 14$$

انتگرال خط داده شده را پس از تحقیق در استقلال از مسیر حساب کنید .

$$\int_{(0,0)}^{(1,-1)} \arctan x dx + \arctan y dy \quad \cdot 15$$

$$\int_{(-1,\pi/3)}^{(\pi/2,1)} (\sin xy)(y dx + x dy) \quad \cdot 16$$

$$\int_{(-1,1,-1)}^{(1,-1,\sqrt{3})} \frac{yz dx + xz dy + xy dz}{1 + x^2 y^2 z^2} \quad \cdot 17$$

$$\int_{(-1,2,-2)}^{(3,-4,12)} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \cdot 18$$

مساحت سطح S ذکر شده را بیابید .

۱۹. S بخشی از صفحه $3x + 4y + 12z = 1$ که داخل استوانه $y^2 + z^2 = 1$ قرار دارد

۲۰. S بخشی از مخروط $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ است که توسط استوانه هذلولوی $x^2 - y^2 = 1$

و صفحات $y = \pm\sqrt{2}$ جدا می شود .

۲۱. S بخشی از مخروط $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ است که توسط استوانه $x^2 + z^2 = a^2$ به شعاع a

جدا می شود .

۲۲. همانطور که در صفحه ۷۵۵ نشان دادیم ، مساحت A سطح S حاصل از دوران نمودار

تابع نامنفی پیوسته $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) حول محور x از فرمول زیر به دست می آید :

$$A = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

این فرمول را به کمک انتگرال سطح به دست آورید .

۲۳. انتگرال سطح

$$\iint_S \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

را در صورتی حساب کنید که S بخشی از سهمی گون هذلولوی $z = xy$ باشد که توسط

استوانه $x^2 + y^2 = 1$ جدا می شود .

۲۴. فرض کنید S سطح جانبی یک مخروط ناقص با چگالی یک ، شعاع بالایی r_1 ،

شعاع قاعده r_2 ، و ارتفاع h باشد (ر.ک. مسئله ۱۱ ، صفحه ۷۰۴) . گشتاور ماند

S حول محور تقارن آن را بیابید .

انتگرالهای خط و سطح ۱۵۲۷

۲۵. میدان سرعت مایعی $v = yi + zj + zk$ به متربرثانیه است. چند متر مکعب بر ثانیه از مایع از سطح مثلثی S به رئوس $(1, 0, 0)$ ، $(0, 2, 0)$ ، و $(0, 0, 3)$ در جهت رو به بالا عبور می‌کند؟

۲۶. شار میدان $F = xi + yj + zk$ خارج از سطح بسته S محدود به مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ صفحه $z = 1$ را بیابید.

۲۷. فرض کنید C کنتور مربعی به رئوس $(\pm 1, \pm 1)$ باشد که یکبار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود. انتگرال خط

$$\int_C (ye^{xy} - y^2 \sin x) dx + (xe^{xy} + 2y \cos x) dy$$

را با استفاده از قضیه گرین حساب کنید.

۲۸. فرض کنید C یک منحنی بسته ساده، قطعه قطعه هموار باشد. تعبیر هندسی انتگرال خط $\int_C (2xy - y) dx + x^2 dy$ چیست؟

۲۹. فرض کنید توابع $f = f(x, y)$ و $g = g(x, y)$ بر ناحیه R ، که از منحنی بسته ساده، قطعه قطعه هموار C و درونش تشکیل شده است، به طور پیوسته مشتقپذیر باشند. نشان دهید که

$$\int_C fg dx + fg dy = \iint_R \left[g \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) + f \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) \right] dA.$$

۳۰. با استفاده از قضیه گرین، نشان دهید که مساحت محصور به مسیر چندضلعی بسته ساده $P_1 P_2 P_3 \dots P_n P_1$ به رئوس

$$P_i = (x_i, y_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ساوی نصف قدرمطلق مجموع

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \dots + (x_n y_1 - x_1 y_n)$$

است. بخصوص، مسئله ۱۶، صفحه ۱۲۱۰، را در مورد مساحت مثلث به رئوس (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) ، و (x_3, y_3) تحقیق نمایید.

راهنمایی. ابتدا نشان دهید که اگر L پاره خط از (x_1, y_1) تا (x_2, y_2) باشد،

$$\int_L x dy - y dx = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

۳۱. با استفاده از مسئله ۳۰، مساحت محصور به چهار ضلعی با رئوس $(1, -1)$ ، $(3, -2)$ ، $(5, 1)$ ، و $(2, 6)$ را بیابید.

۳۲. انتگرال مضاعف

$$\iint_R \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}} dx dy$$

را در صورتی بیابید که R ناحیه واقع در ربع اول و محدود به محورهای مختصات و قوس سهمی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ باشد.

راهنمایی. از تبدیل $x = u \cos^4 v, y = u \sin^4 v$ استفاده کنید.

دیورژانس میدان برداری سه بعدی داده شده را در صورتی بیابید که \mathbf{a} و \mathbf{b} بردارهای ثابتی بوده و $\mathbf{r} = xi + yj + zk$.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{r} \quad ۳۳ \qquad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} \quad ۳۵ \qquad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{b} \quad ۳۴$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{b} \quad ۳۶ \qquad (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{r} \quad ۳۷ \qquad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \times \mathbf{r}) \quad ۳۸$$

۳۹. میدان $\mathbf{F} = (3x - y)\mathbf{i} + (2y - x^2)\mathbf{j} + (xy - cz)\mathbf{k}$ به ازای چه مقداری از ثابت c سولنوئیدی است؟

۴۰. فرض کنید T, S ، و \mathbf{n} همانند قضیه دیورژانس بوده، و A مساحت سطح S باشد. نشان دهید که

$$\iiint_T \operatorname{div} \mathbf{n} \, dV = A.$$

۴۱. نشان دهید که قضیه دیورژانس برای ناحیه توپر T بین دو سطح بسته S' و S'' در صورتی برقرار می ماند که انتگرال سطح $\iiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$ با مجموعی از انتگرالهای سطح روی S' و S'' با قائم یک \mathbf{n} در جهت دور شدن از T عوض شود.

۴۲. فرض کنید $\mathbf{F} = (q/r^2)\mathbf{u}$ یک میدان قانون عکس مجذور ناشی از جاذبه یا دافعه (مثلاً، ثقلی یا الکترواستاتیک) در مبداء باشد. در اینجا q یک ثابت مثبت یا منفی است، $\mathbf{r} = xi + yj + zk$ ، $r = |\mathbf{r}|$ ، و $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$. به کمک مسئله قبل، نشان دهید هرگاه S یک سطح بسته قطعه قطعه هموار حول مبداء با قائم یک \mathbf{n} خارجی باشد، آنگاه

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 4\pi q.$$

نتیجه ای که به قانون گاوس^۱ معروف است.

راهنمایی. پس از نشان دادن اینکه به ازای $r \neq 0$ ، $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ ، از مسئله ۴۱ استفاده کنید.

۴۳ تا ۴۸. کرل هر یک از میدانهای برداری مسائل ۳۳ تا ۳۸ را بیابید.

راهنمایی. در مسائل ۴۶ تا ۴۸ از "قاعده بک-کب" استفاده کنید (ر.ک. مسئله ۴۸، صفحه ۱۱۶۲).

۴۹. فرض کنید f میدان اسکالری با مشتقات جزئی اول و دوم پیوسته باشد. نشان دهید که میدان برداری ∇f غیردورانی است.

۵۰. فرض کنید T ، S ، و \mathbf{n} همانند قضیه دیورژانس بوده (ر.ک. صفحه ۱۵۰۲)، و f یک میدان اسکالر به طور پیوسته مشتقپذیر بر T باشد. نشان دهید که

$$\iint_S f \mathbf{n} d\sigma = \iiint_T \text{grad } f dV.$$

راهنمایی. در قضیه دیورژانس قرار دهید $\mathbf{F} = f\mathbf{c}$ ، که در آن \mathbf{c} بردار ثابتی می باشد.

۵۱. فرض کنید S یک سطح بسته، قطعه قطعه هموار با قائم یکه خارجی \mathbf{n} باشد. نشان دهید که $\iint_S \mathbf{n} d\sigma = \mathbf{0}$.

۵۲. پدیده‌های الکترومغناطیس تحت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه اول، به نام معادلات ماکسول^۱، عمل می کنند که شامل میدان الکتریکی $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, t)$ و میدان مغناطیسی $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y, z, t)$ است که هر دو تابع t و مختصات فضایی x ، y ، و z می باشند. در فضای تهی، معادلات ماکسول به شکل زیرند:

$$\text{div } \mathbf{E} = 0, \quad \text{curl } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad \text{curl } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

که در آن c سرعت نور است. نشان دهید هر مؤلفه \mathbf{E} و \mathbf{H} در معادله موج

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

صدق می کند، که از این ماکسول وجود امواج الکترومغناطیس را که با سرعت نور حرکت می کنند نتیجه گرفت. امواج رادیویی، اشعه X ، و خود نور همه امواجی الکترو-مغناطیس می باشند.

راهنمایی. به کمک فرمول (یک)، صفحه ۱۵۲۳، نشان دهید که معادلات ماکسول روابط زیر را ایجاب می کنند:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

معادلات دیفرانسیل مقدماتی^{۱۶}

معادلات دیفرانسیل قبلاً در بخشهای ۶.۲ و ۶.۴ آمده‌اند، و در فصل ۶ معادلات دیفرانسیلی از نوع خاص، به نام معادلات جدایی‌پذیر، در حل چند مسئله کار بسته به طور وسیع به کار گرفته شد. در این فصل کوتاه، مبحث معادلات دیفرانسیل را کمی بیشتر تعقیب می‌کنیم. این مبحث بسیار وسیع بوده، و در فرصت باقیمانده فقط می‌توانیم چند مطلب مقدماتی مهم را مطرح سازیم. ما خود را به معادلات دیفرانسیل معمولی محدود می‌کنیم؛ یعنی، معادلاتی که شامل یک یا چند مشتق تابع $y = y(x)$ یا از تنها متغیر مستقل x اند. البته، معادلات دیفرانسیل جزئی نیز وجود دارند که شامل مشتقات جزئی تابع $y = y(x_1, \dots, x_n)$ از چند متغیر مستقل x_1, \dots, x_n اند، ولی بررسی اصولی این معادلات از حوصله این درس خارج می‌باشد.

منظور از مرتبه یک معادله دیفرانسیل یعنی مرتبه بالاترین مشتق تابع مجهول y که در معادله آمده است. گوییم یک معادله دیفرانسیل مرتبه n خطی است اگر بتوان آن را به شکل زیر نوشت:

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = b(x),$$

که در آن $y^{(n)}, y'', y', y$ ، n مشتق اول y بوده، و $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x), b(x)$ فقط تابع متغیر مستقل x باشند (بعضی یا تمام آنها ممکن است ثابت باشند). در غیر این صورت، معادله را غیرخطی خواهیم نامید. مثلاً،

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x^2 \frac{dy}{dx} - xy = e^x$$

یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم است، ولی

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = 0, \quad y \frac{dy}{dx} + \sin x = 0, \quad x \frac{dy}{dx} + \sin y = 0$$

همه معادلات دیفرانسیل غیرخطی از مرتبه اول می باشند. اکثر معادلات بخش ۱۰.۱۶ غیر خطی اند، ولی بقیه فصل عمدتاً "به معادلات خطی مراتب اول و دوم و کاربردهایشان می پردازد".

۱۰.۱۶ معادلات کامل و عاملهای انتگرالگیری

فرض کنیم $U = U(x, y)$ یک تابع به طور پیوسته مشتقپذیر دو متغیره بوده، و معادله

$$(1) \quad U(x, y) = C$$

را در نظر می گیریم، که در آن C ثابت دلخواهی می باشد. با این فرض که (۱) y رابطه طور ضمنی به صورت تابع مشتقپذیری از x تعریف می کند، از قاعده زنجیره ای معلوم می شود که

$$\frac{dU}{dx} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

پس نتیجه می شود که

$$(2) \quad P + Q \frac{dy}{dx} = 0,$$

که در آن توابع $P = P(x, y)$ و $Q = Q(x, y)$ مشتقات جزئی U می باشند:

$$(3) \quad P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

لذا، جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه اول معادله (۲) با (۱) داده می شود. این یعنی به ازای هر مقدار از C ، معادله (۱) یک تابع ضمنی مانند $y = y(x)$ تعریف می کند که در معادله (۲) صدق می نماید. همچنین، ممکن است (۲) جوابهای منفرد داشته باشد؛ یعنی، جوابهایی که نظیر به هیچ مقداری از C نیستند؛ مثلاً، در مثال ۴ زیر یک جواب منفرد داریم. توجه کنید که معادله (۲) برحسب دیفرانسیلها شکل زیر را به خود می گیرد:

$$(2') \quad P dx + Q dy = 0.$$

معادلات کامل. به عکس، اگر معادله دیفرانسیلی به شکل (۲) داده شده باشد که در آن $P = P(x, y)$ و $Q = Q(x, y)$ به طور پیوسته مشتقپذیر باشند، فرض می کنیم تابعی چون $U = U(x, y)$ موجود باشد که در شرایط (۳) صدق نمایند. در این صورت، گوییم (۲) یک معادله دیفرانسیل کامل است، و در این وضع

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = P dx + Q dy$$

یک دیفرانسیل کامل نام دارد (مفهوم اخیر در مسئله ۲۹، صفحه ۱۴۵۸، پیش‌بینی شده بود). ما قبلاً " از فصل ۱۵ می‌دانیم که $P dx + Q dy$ بر قلمرو همبند ساده D دیفرانسیل کامل است، یا معادلاً " $F = Pi + Qj$ بر D میدان گرادیان است اگر و فقط اگر شرط

$$(۴) \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

در هر نقطه از D برقرار باشد. در واقع، (۳) رابطه (۴) را ایجاب می‌کند، زیرا

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

و همانطور که در قضیه ۳، صفحه ۱۴۵۳، برای قلمرو مستطیلی، و در نتیجه ۲، صفحه ۱۴۸۲، برای قلمرو همبند ساده کلی نشان دادیم، رابطه (۴) رابطه (۳) را ایجاب خواهد کرد.

مثال ۱. در بخش ۶.۶ معادلات دیفرانسیل جدایی‌پذیر، یعنی معادلاتی به شکل

$$(۵) \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \quad (g(y) \neq 0),$$

شامل تابع مجهول $y = y(x)$ و دو تابع معلوم $f(x)$ و $g(y)$ را معرفی کردیم. هر معادله جدایی‌پذیر کامل است. برای مشاهده این امر، فرض کنیم $f(x)$ و $g(y)$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند، و قرار می‌دهیم

$$P = f(x), \quad Q = -g(y).$$

در این صورت، رابطه (۵) را می‌توان به شکل (۲) نوشت، و شرط کامل بودن خودبه‌خود برقرار است، زیرا $\partial Q/\partial x = 0 = \partial P/\partial y$.

مثال ۲. معادله دیفرانسیل

$$(۶) \quad (2x + y) + (x + y) \frac{dy}{dx} = 0$$

را در نظر می‌گیریم. این معادله با آنکه جدایی‌پذیر نیست (چرا؟) کامل است. در واقع، $P = 2x + y$ و $Q = x + y$ ؛ در نتیجه، $\partial Q/\partial x = 1 = \partial P/\partial y$. معادله (۶) را می‌توان به طرق مختلف حل کرد. یک طریق نوشتن (۶) به شکل معادل زیر است:

$$(۶') \quad (y dx + x dy) + 2x dx + y dy = 0,$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$d(xy) + d(x^2) + d(\frac{1}{2}y^2) = 0.$$

لذا، (۶) به صورت زیر درمی‌آید:

$$d(xy + x^2 + \frac{1}{2}y^2) = 0,$$

که فوراً " به جواب عمومی

$$(۷) \quad xy + x^2 + \frac{1}{2}y^2 = C$$

منجر می‌شود، که در آن C یک ثابت دلخواه است. لذا، معادله (۶) را به آسانی با امتحان حل کرده‌ایم.

راه دیگری برای حل (۶) این است که بنویسیم

$$(۸) \quad P = 2x + y = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = x + y = \frac{\partial U}{\partial y},$$

که در آن $\partial Q / \partial x = \partial P / \partial y$ می‌گوید که باید تابع U صادق در این دستگاه معادلات موجود باشد. با انتگرالگیری از معادله اول (۸) نسبت به x و ثابت گرفتن y ، به دست می‌آوریم

$$(۹) \quad U = x^2 + xy + f(y),$$

که در آن $f(y)$ تابع مشتق‌پذیری فقط از متغیر y است. پس، برحسب مشتق $f'(y)$ ، داریم

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x + f'(y)$$

با گذاردن این عبارت $\partial U / \partial y$ در معادله دوم (۸)، به دست می‌آوریم $x + y = x + f'(y)$

یا $f'(y) = y$ ؛ در نتیجه، با تقریب یک‌ثابت جمعی، $f(y) = \frac{1}{2}y^2$. به ازای این $f(y)$ ، معادله

(۹) به صورت زیر درمی‌آید:

$$U = x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2,$$

و با متحد گرفتن U و C ، مجدداً " فرمول (۷) به دست خواهد آمد.

راه سوم حل (۶) استفاده از فرمول

$$U = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt$$

است که در صفحه ۱۴۵۴ ثابت شد. به ازای $x_0 = y_0 = 0$ ، معلوم می‌شود که، با تقریب

یک ثابت جمعی دلخواه،

$$U = \int_0^x 2t dt + \int_0^y (x+t) dt = \left[t^2 \right]_0^x + \left[xt + \frac{1}{2}t^2 \right]_{t=0}^y = x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2$$

که مجدداً " فرمول (۷) برای جواب عمومی به دست می‌آید .

هر وقت معادلهٔ دیفرانسیلی را حل کردید ، باید جواب را با مشتقگیری مستقیم از آن و گذاردن در معادلهٔ دیفرانسیل اصلی امتحان نمایید . مثلاً " ، در مثال فوق ، مشتقگیری (ضمنی) از جواب عمومی (۷) فوراً " به معادلهٔ دیفرانسیل (۶) منجر می‌شود .

مثال ۳ . جواب خصوصی معادلهٔ کامل (۶) را چنان بیابید که در شرط اولیهٔ $y(0) = 1$ صدق کند .

حل . با فرض $x = 0$ و $y = 1$ در فرمول (۷) فوراً " نتیجه می‌شود که $C = \frac{1}{2}$ ، و در این صورت (۷) به شکل $\frac{1}{2}y^2 = xy + x^2 + \frac{1}{2}$ یا معادلاً

$$(10) \quad y^2 + 2xy + (2x^2 - 1) = 0$$

درمی‌آید . به آسانی می‌توان معادلهٔ (۱۰) را نسبت به y حل کرد . در واقع ، طبق فرمول جواب یک معادلهٔ درجهٔ دو ،

$$y = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 - 4(2x^2 - 1)}}{2} = -x + \sqrt{1 - x^2},$$

زیرا اگر y بخواهد در شرط اولیهٔ $y(0) = 1$ صدق کند ، باید علامت به علاوه اختیار شود . لذا ، جواب خصوصی مطلوب عبارت است از

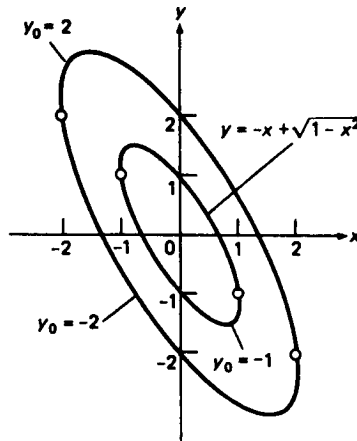
$$(11) \quad y = -x + \sqrt{1 - x^2} \quad (-1 < x < 1),$$

که در آن صدق معادلهٔ اصلی (۶) در (۱۱) باید مستقیماً " با مشتقگیری امتحان شود . شرط $-1 < x < 1$ وجود و مشتقپذیری y را تضمین می‌کند .

نمودار هر جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل منحنی انتگرال نام دارد . در شکل ۱ نه فقط منحنی انتگرال (۱۱) معادلهٔ (۶) را نشان داده‌ایم ، بلکه ، به کمک مسئلهٔ ۱۳ ، منحنیهای انتگرال نظیر به جوابهای خصوصی صادق در شرایط اولیهٔ

$$y(0) = y_0 \quad (y_0 = -1, 2, -2)$$

را نیز رسم کرده‌ایم . توجه کنید که چگونه جوابهای خصوصی صادق در شرایط اولیهٔ $y(0) = 2$ و $y(0) = -2$ بر بازهٔ بزرگتر $(-2 < x < 2)$ از آنهایی که در شرایط $y(0) = 1$ و $y(0) = -1$ صدق می‌کنند تعریف شده‌اند .



شکل ۱

عاملهای انتگرالگیری. اغلب می توان یک معادلهٔ دیفرانسیل غیرکامل به شکل

$$(12) \quad P + Q \frac{dy}{dx} = 0$$

را با ضرب در تابع مناسبی چون $\mu = \mu(x, y)$ ، به نام عامل انتگرالگیری، به معادلهٔ کامل

$$(12') \quad \mu \left(P + Q \frac{dy}{dx} \right) = 0$$

تبدیل کرد. در واقع، هرگاه μ هرگز صفر نشده یا فقط در (x, y) صفر شود که هر دوی P و Q صفرند، آنگاه جواب (12') نیز جوابی از معادلهٔ اصلی (12) خواهد شد.

مثال ۴. معادلهٔ دیفرانسیل

$$(13) \quad y + xy^2 - x \frac{dy}{dx} = 0$$

یا معادلهٔ

$$(13') \quad (y + xy^2) dx - x dy = 0$$

را حل کنید.

حل. در اینجا $P = y + xy^2$ ، $Q = -x$ ، $\partial P / \partial y = 1 + 2xy$ و $\partial Q / \partial x = -1$ ؛

در نتیجه، $\partial Q/\partial x \neq \partial P/\partial y$ ، بنابراین، (۱۳) یک معادله کامل نیست. اما حدسی زیرکانه نشان می‌دهد که $\mu = 1/y^2$ یک عامل انتگرالگیری برای (۱۳) است. در واقع، با ضرب (۱۳) در $1/y^2$ ، با امتحان به دست می‌آوریم

$$\left(\frac{1}{y} + x\right) dx - \frac{x}{y^2} dy = \frac{y dx - x dy}{y^2} + x dx = d\left(\frac{x}{y}\right) + d\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

واضح است که جواب عمومی این معادله دیفرانسیل عبارت است از

$$\frac{x}{y} + \frac{1}{2}x^2 = C,$$

که در آن C ثابت دلخواهی است. با حل نسبت به y ، معلوم می‌شود که

$$(14) \quad y = \frac{2x}{2C - x^2},$$

که به آسانی می‌توان صدق کردن آن را در معادله غیرکامل اصلی (۱۳) امتحان کرد. توجه کنید که در تقسیم بر y^2 خطر از دست دادن جواب $y \equiv 0$ وجود دارد؛ و در واقع، این صورت می‌گیرد، زیرا $y \equiv 0$ بوضوح جواب (۱۳) می‌باشد. این یک جواب منفرد است، زیرا نمی‌توان آن را از جواب "عمومی" (۱۴) به ازای مقداری از C به دست آورد.

معادله (۱۳) غیرخطی است (چرا؟). می‌توان نشان داد که یک معادله دیفرانسیل خطی جواب منفرد ندارد. لذا، در سایر بخشها با این پیچیدگی مواجه خواهیم شد.

مسائل

ابتدا تحقیق کنید که معادله دیفرانسیل داده شده به شکل $P dx + Q dy = 0$ کامل است، و سپس جواب عمومی آن را بیابید.

$$1. \quad (x + y) dx + (x - y) dy = 0$$

$$2. \quad (y^2 - x^2) dx + 2xy dy = 0$$

$$3. \quad \left(4 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx + \frac{2y}{x} dy = 0$$

$$4. \quad \cos x \sin y dx + \sin x \cos y dy = 0$$

$$5. \quad y^2 \cos xy dx + (\sin xy + xy \cos xy) dy = 0$$

$$6. \quad y \cosh y dx + (x \cosh y + xy \sinh y) dy = 0$$

$$[(x+y)e^x - e^y] dx + [e^x - (x+y)e^y] dy = 0 \quad \cdot 7$$

$$e^x y dx + (e^x - 2) dy = 0 \quad \cdot 8$$

$$(2xye^{x^2} - \frac{1}{2}y^2) dx + (e^{x^2} - xy) dy = 0 \quad \cdot 9$$

$$(1 + e^{x/y}) dx + e^{x/y} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0 \quad \cdot 10$$

$$\left(3x^2 \tan y - \frac{2y^3}{x^3}\right) dx + \left(x^3 \sec^2 y + 2y + \frac{3y^2}{x^2}\right) dy = 0 \quad \cdot 11$$

$$\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+1}} + 3x^2y - \frac{y}{x}\right) dx + (\sqrt{x^2+1} + x^3 - \ln|x|) dy = 0 \quad \cdot 12$$

۱۳. نشان دهید که جواب خصوصی معادله (۶) صادق در شرط اولیه $y(0) = y_0 \neq 0$ عبارت است از

$$y = \begin{cases} -x + \sqrt{y_0^2 - x^2}, & y_0 > 0 \\ -x - \sqrt{y_0^2 - x^2}, & y_0 < 0 \end{cases} \text{ اگر}$$

آیا جوابی خصوصی که در شرط اولیه $y(0) = 0$ صدق کند وجود دارد؟ نشان دهید که همانطور که از شکل ۱ برمی آید، هر منحنی انتگرال (۶) قوسی از یک بیضی است که محور اطولش در امتداد خط $x + y = 0$ می باشد.

۱۴. نشان دهید هرگاه $\mu = \mu(x, y)$ یک عامل انتگرالگیری معادله دیفرانسیل معمولی غیر کامل $P dx + Q dy = 0$ باشد، آنگاه μ در معادله دیفرانسیل جزئی

$$P \frac{\partial \mu}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad (\text{یک})$$

صدق می کند، که به

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \quad (\text{دو})$$

تحویل می شود اگر μ فقط تابعی از x باشد، و به

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dy} = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad (\text{دو}')$$

تحویل می شود اگر μ فقط تابعی از y باشد. در اینجا، البته، فرض است که طرف راست (دو) یا (دو') فقط تابعی از x یا y می باشد. حل معادله (یک) به صورت کلی ناممکن است، ولی حل (دو) یا (دو') آسانتر می باشد. مثلاً، نشان دهید که چطور

می توان عامل انتگرالگیری مثال ۴ را با حل (دو) به دست آورد .

عامل انتگرالگیری μ معادله دیفرانسیل غیرکامل داده شده را تعیین کرده ، و سپس جواب عمومی آن را بیابید .

$$(3xy + 2) dx + x^2 dy = 0 \quad . ۱۵$$

$$y dx - x dy = 0 \quad . ۱۶$$

$$y dx - 3x dy = 0 \quad . ۱۷$$

$$2x \tan y dx + x^2 dy = 0 \quad . ۱۸$$

$$(e^x - y^2) dx + 2y dy = 0 \quad . ۱۹$$

$$\cos x dx + (e^{-y} + \sin x) dy = 0 \quad . ۲۰$$

$$(x^2 + y^2 + y) dx - x dy = 0 \quad . ۲۱$$

$$(x^2 \sqrt{x^2 + 1} + y^2) dx + 2xy \ln |x| dy = 0 \quad . ۲۲$$

$$xy^2 dx + (x^2 y - x) dy = 0 \quad . ۲۳$$

$$(y^2 \cos x + y \ln |y|) dx + (x + y \sin x) dy = 0 \quad . ۲۴$$

یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول به شکل $y' = dy/dx = f(x, y)$ را همگن گوئیم اگر تابع یک متغیره‌ای مانند g موجود باشد به طوری که $f(x, y) = g(y/x)$. مثلاً " ، معادله

$$(سه) \quad y' = \frac{2x^2 - y^2}{xy} = \frac{2 - (y/x)^2}{y/x} \quad (xy \neq 0)$$

همگن بوده و در آن $g(u) = (2 - u^2)/u$. برای حل یک معادله همگن جانشانی $y = xu$ را انجام می دهیم . در این صورت ، $y' = u + xu'$ ؛ در نتیجه ، $y' = g(u)$ شکل زیر را به خود می گیرد :

$$x \frac{du}{dx} + u = g(u),$$

یا معادلاً

$$\frac{dx}{x} + \frac{du}{u - g(u)} = 0$$

که در آن متغیره‌های x و u از هم جدا شده اند . این معادله دارای جواب عمومی زیر است :

$$(چهار) \quad \ln |x| + \int \frac{du}{u \dots g(u)} = C.$$

حال جواب عمومی معادله همگن اصلی را می توان با گذاردن $u = y/x$ در (چهار) یافت .

۲۵ . با استفاده از روشی که هم اکنون توصیف شد ، جواب عمومی (سه) را بیابید .

۲۶. جواب خصوصی (سه) صادق در شرط $2 = y(1)$ را بیابید

۲۷. جواب خصوصی (سه) صادق در شرط $1 = y(2)$ را بیابید

جواب عمومی معادله^{۲۶} همگن داده شده را بیابید.

$$x^2 y' = x^2 - xy + y^2 \quad \cdot 28$$

$$xyy' = x^2 + y^2 \quad \cdot 29$$

$$xy' = y - 2\sqrt{xy} \quad \cdot 30$$

۲۰.۱۶ معادلات خطی مرتبه اول

هر معادله به شکل

$$(1) \quad y' + py = q,$$

که در آن $p = p(x)$ و $q = q(x)$ توابع پیوسته‌ای از متغیر مستقل x اند، یک معادله دیفرانسیل خطی

مرتبه اول نام دارد. برای حل معادله^۱ (۱)، فرض کنیم $P = \int p(x) dx$ پاد مشتق ثابتی

از p بوده، و سپس (۱) را در e^P ضرب می‌کنیم. از این نتیجه می‌شود که

$$y'e^P + pe^P y = qe^P,$$

و چون $(e^P)' = P'e^P = pe^P$ ، عبارت سمت چپ مشتق حاصل ضرب ye^P نسبت به x است.

بنابراین،

$$\frac{d}{dx}(ye^P) = qe^P,$$

که رابطه^۲

$$ye^P = \int qe^P dx + C,$$

یا معادلا^۳

$$(2) \quad y = e^{-P} \left(\int qe^P dx + C \right) = e^{-P} \int qe^P dx + Ce^{-P}$$

را ایجاب می‌کند. این فرمول، که شامل ثابت دلخواه C است، جواب عمومی معادله^۱ (۱)

می‌باشد. اگر معادله^۲ (۲) را به صورت باز بنویسیم، به شکل زیر درمی‌آید:

$$(2') \quad y = e^{-\int p(x) dx} \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + Ce^{-\int p(x) dx}.$$

برای هماهنگی با اصطلاح آمده در صفحه^{۱۵۳۵}، تابع $\mu = e^P$ را یک عامل انتگرالگیری

معادله^۱ (۱) می‌نامیم. ما μ را با "امتحان" به دست آوردیم، یعنی با کار حدسی، ولی

μ را می‌توان به صورت مکانیکی تری به دست آورد. در واقع، فرض کنیم (۱) در μ ضرب

شده باشد و بخواهیم طرف چپ معادله حاصل

$$\mu y' + \mu p y = \mu q$$

به شکل $(\mu y)'$ باشد. در نتیجه، می‌توان از آن به راحتی انتگرال گرفت. در این صورت، شرط $(\mu y)' = \mu y' + \mu p y$ فوراً "به معادله جدایی‌پذیر $\mu' = p\mu$ نسبت به μ ، که جواب $e^p = \mu$ را دارد، منجر می‌شود.

مثال ۱. جواب عمومی

$$(۳) \quad y' + ay = bx$$

را در صورتی بیابید که a و b ثابتهای ناصفری باشند.

حل. معادله (۳) به شکل (۱) است که در آن $p = a$ و $q = bx$ ؛ در نتیجه،

$$P = \int p dx = ax, \quad \int qe^P dx = b \int xe^{ax} dx.$$

با انتگرالگیری جزء به جزء، معلوم می‌شود که

$$\int xe^{ax} dx = \int x d\left(\frac{e^{ax}}{a}\right) = \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{1}{a} \int e^{ax} dx = \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2}.$$

بنابراین، طبق رابطه (۲)، جواب عمومی (۳) خواهد شد

$$y = be^{-ax} \left(\frac{xe^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} \right) + Ce^{-ax} = \frac{bx}{a} - \frac{b}{a^2} + Ce^{-ax}$$

مثال ۲. جواب خصوصی

$$(۴) \quad xy' - y = x^4$$

صادق در شرط اولیه $y(1) = 3$ را بیابید.

حل. از تقسیم (۴) بر x به دست می‌آوریم

$$(۴') \quad y' - \frac{1}{x}y = x^3,$$

که به شکل (۱) به ازای $p = -1/x$ و $q = x^3$ است. بنابراین،

$$(۴'') \quad P = \int p dx = -\int \frac{dx}{x} = -\ln x, \quad e^P = \frac{1}{x}, \quad \int qe^P dx = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3,$$

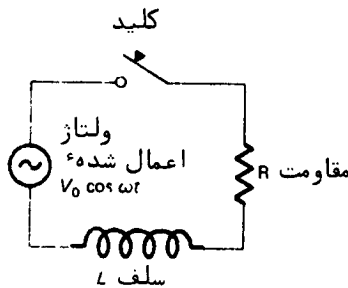
و از (۲) معلوم می‌شود که جواب عمومی (۴)، و در نتیجه (۴)، مساوی است با

$$(۵) \quad y = \frac{1}{3}x^4 + Cx.$$

با آنکه $p = -1/x$ در $x = 0$ تعریف نشده است، این جواب بر تمام خط حقیقی در (۴) صدق می‌کند (چرا؟). برای یافتن جواب خصوصی صادق در شرط $y(1) = 3$ ، در (۵) قرار می‌دهیم $x = 1$ و $y = 3$ ، خواهیم داشت $C = \frac{8}{3}$. لذا، جواب خصوصی مطلوب عبارت است از

$$y = \frac{1}{3}x^4 + \frac{8}{3}x.$$

مثال ۳. کلیدی را به‌طور ناگهانی زده، و ولتاژ $V = V_0 \cos \omega t$ را در مدار الکتریکی شکل ۲ مرکب مقاومت R اهم که با سلف L هانری سری شده است برقرار می‌کنیم. شدت جریان $i = i(t)$ مدار را پیدا نمایید.



شکل ۲

حل. واحد i آمپر است. ثابت V_0 ولتاژ اوج است، یعنی ماکزیمم V ، و ω فرکانس زاویه‌ای مساوی $2\pi f$ است، که در آن f فرکانس به دور بر ثانیه است (ر. ک. صفحه ۱۵۶۰). در مثال ۳. صفحه ۵۵۳، حالت dc (جریان مستقیم) را در نظر گرفتیم، که در آن V ثابت است، و دیدیم شدت جریان i در معادله دیفرانسیل خطی

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V,$$

یا معادلا"

$$(۶) \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}.$$

صدق می‌کند، و سپس (۶) را با جداسازی متغیرها حل کردیم. معادله (۶) در حالت فعلی ac (جریان متناوب) نیز برقرار است، ولی در اینجا v تابعی از t است که از جدایی پذیر بودن (۶) ممانعت می‌کند. با اینحال، هنوز می‌توان با استفاده از روشی که هم‌اکنون عرضه شد به (۶) پرداخت.

برای این کار، ملاحظه می‌کنیم که (۶) به شکل (۱) است با t به جای x ، i به جای

y ، و

$$p = \frac{R}{L}, \quad q = \frac{V}{L} = \frac{V_0}{L} \cos \omega t,$$

در نتیجه،

$$P = \int p dt = \frac{Rt}{L}, \quad \int qe^P dt = \frac{V_0}{L} \int e^{Rt/L} \cos \omega t dt.$$

بنابر فرمول (۹)، صفحه ۶۰۸،

$$\int e^{Rt/L} \cos \omega t dt = e^{Rt/L} \frac{(R/L) \cos \omega t + \omega \sin \omega t}{(R/L)^2 + \omega^2},$$

و در نتیجه،

$$\int qe^P dt = V_0 e^{Rt/L} \frac{R \cos \omega t + \omega L \sin \omega t}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

لذا، طبق فرمول (۲)، جواب عمومی (۶) به ازای $V = V_0 \cos \omega t$ عبارت است از

$$(۷) \quad i = \frac{V_0}{R^2 + \omega^2 L^2} (R \cos \omega t + \omega L \sin \omega t) + C e^{-Rt/L}$$

برای تعیین ثابت C ، شرط اولیه $i(0) = 0$ را اعمال می‌کنیم (تا لحظه $t = 0$ که کلید زده می‌شود شدت جریانی وجود ندارد). با قراردادن $t = 0$ و $i = 0$ در (۷)، معلوم می‌شود که

$$C = -\frac{V_0 R}{R^2 + \omega^2 L^2},$$

و در این صورت، (۷) به شکل زیر درمی‌آید:

$$(۸) \quad i = \frac{V_0}{R^2 + \omega^2 L^2} [(R \cos \omega t + \omega L \sin \omega t) - R e^{-Rt/L}].$$

توجه کنید که این فرمول شامل جواب مثال ۳، صفحه ۵۵۳، به عنوان حالتی خاص است، و این را می‌توان با فرض $\omega = 0$ و حذف زیرنویس V_0 تحقیق کرد.

بنابر (۸)، i تفاضل دوجمله است، یکی شدت جریان متناوب حالت پایدار

$$(۹) \quad i_{ac} = \frac{V_0}{R^2 + \omega^2 L^2} (R \cos \omega t + \omega L \sin \omega t)$$

و دیگری شدت جریان گذرای

$$i_{tr} = \frac{V_0 R}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-Rt/L},$$

که مثل حالت dc سریعاً "مستهلک می شود" (ر. ک. شکل ۵۵۵). فرمول (۹) پیچیده می نماید، ولی می توان آن را به شکل بسیار ساده تر

$$(۹') \quad i_{ac} = \frac{V_0}{Z} \cos(\omega t - \phi),$$

برحسب مقاومت ظاهری

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

و زاویه

$$\phi = \arctan \frac{\omega L}{R}$$

نوشت (شرح جزئیات را به عنوان تمرین می گذاریم). لذا، i_{ac} دارای همان فرکانس ولتاژ اعمال شده V است، ولی نسبت به V به اندازه ϕ رادیان "تأخیر دارد"، ولی شدت جریان اوج i_0 ، یعنی ماکزیمم i_{ac} ، با فرمول

$$i_0 = \frac{V_0}{Z},$$

شامل مقاومت ظاهری، به ولتاژ اوج V_0 مربوط شده است.

مسائل

جواب عمومی معادله خطی مرتبه اول داده شده را بیابید.

$$y' + ay = e^{bx} \quad . ۲ \qquad y' + ay = b \quad . ۱$$

$$y' - 2xy = xe^{-x^2} \quad . ۴ \qquad y' - xy = x \quad . ۳$$

$$y' + y = \sin x \quad . ۶ \qquad y' + 2y = x^2 + x \quad . ۵$$

$$y' + \frac{2}{x}y = x^2 \quad . ۸ \qquad y' - \frac{1}{x}y = x \quad . ۷$$

$$y' + \frac{n}{x}y = \frac{1}{x^n} \quad . ۱۰$$

$$y' + \frac{1}{x}y = x \cos x \quad . ۹$$

$$xy' = y - 1 \quad . ۱۲$$

$$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2 e^x \quad . ۱۱$$

$$x(x-1)y' + y = x+1 \quad . ۱۳$$

$$(x^2+1)y' - 4xy = (x^2+1)^2 \quad . ۱۴$$

$$(x^2+1)y' - y = \arctan x \quad . ۱۵$$

$$y' + y \cos x = \sin^2 x \cos x \quad . ۱۶$$

مسئله^۶ مقدار اولیه^۶ داده شده را حل کنید .

$$y' + 3y = 4, y(0) = 2 \quad . ۱۷$$

$$y' - y = e^{2x}, y(1) = 0 \quad . ۱۸$$

$$y' - 2y = \cos x, y(\pi/2) = 0 \quad . ۱۹$$

$$y' - \frac{1}{x}y = x \sin x, y(\pi) = 1 \quad . ۲۰$$

$$y' \cos x + y \sin x = 1, y(0) = -1 \quad . ۲۱$$

$$\sqrt{1-x^2}y' + y = 2, y(\frac{1}{2}) = 0 \quad . ۲۲$$

$$y' + \frac{xy}{1+x^2} = x, y(0) = 1 \quad . ۲۳$$

$$y' - \frac{y}{x \ln x} = \ln x, y(e) = 1 \quad . ۲۴$$

۲۵. نشان دهید که در فرمول

$$y = e^{-P} \int qe^P dx + Ce^{-P} \quad (P = \int p dx)$$

برای جواب عمومی معادله^۶ خطی^۶ $y' + py = q$ جمله^۶ اول یک جواب خصوصی این معادله است، ولی جمله^۶ دوم جواب عمومی معادله^۶ $y' + py = 0$ با صفر کردن q به دست می آید .

۲۶. معادله^۶ دیفرانسیل غیرخطی

$$y' + py = qy^n \quad (n \neq 0, 1),$$

که در آن $p = p(x)$ و $q = q(x)$ توابعی پیوسته اند، به معادله^۶ برنولی^۱ معروف است.

نشان دهید که ضرب معادله (یک) در $y^{-(1-n)}$ آن را به معادله دیفرانسیل خطی (یک)

$$u' + (1-n)pu = (1-n)q$$

از متغیر جدید $u = y^{1-n}$ تبدیل می‌کند.

با استفاده از روش مسئله قبل، معادله برنولی داده شده را حل کنید.

$$y' + xy = xy^2 \quad . ۲۷$$

$$xy' - y = y^3 \ln x \quad . ۲۸$$

$$y' - y = xy^{-3} \quad . ۲۹$$

۳۰. کلیدی را ناگهان زده، ولتاژ متناوب $V = V_0 \cos \omega t$ را در یک مدار الکتریکی مرکب از مقاومت R اهم که با خازن C فاراد سری است برقرار می‌کنیم. شدت جریان حاصل $i = i(t)$ مدار را بیابید. نشان دهید که شدت جریان متناوب حالت پایدار مساوی است با

$$i_{\text{eff}} = \frac{V_0}{Z} \cos(\omega t + \phi),$$

که در آن

$$Z = \sqrt{\frac{1}{\omega^2 C^2} + R^2}, \quad \phi = \arctan \frac{1}{\omega RC}.$$

لذا، i_{eff} همان فرکانس ولتاژ اعمال شده V است، ولی به اندازه ϕ نسبت به V "تقدم" دارد.

راهنمایی. مسئله ۲۳، صفحه ۵۵۹، را به یاد آورید.

۳۱. معادله دیفرانسیل غیرخطی $x(y' + 1) = y^2$ را با تحویل آن به معادله خطی نسبت به y حل کنید.

۳۲. نشان دهید که اگر در معادله خطی $y' + py = q$ توابع $p = p(x)$ و $q = q(x)$ هر دو ثابت باشند، این معادله را می‌توان با جداسازی متغیرها حل کرد.

۳.۱۶ معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت

حال به معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم پرداخته، خود را به بررسی معادلات به شکل ساده

$$(۱) \quad y'' + ay' + by = f(x)$$

محدود می‌کنیم، که در آن y' و y'' مشتقات اول و دوم تابع مجهول $y = y(x)$ باشد، a و b ثابت‌هایی حقیقی‌اند، و $f(x)$ تابع پیوسته معلومی از متغیر مستقل x می‌باشد. هر معادله دیفرانسیل از این نوع یک معادله خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت نام دارد. اگر $f(x)$ متحد صفر نباشد، گوییم معادله (۱) غیرهمگن است، ولی اگر $f(x) \equiv 0$ ، معادله به

معادله همگن

$$(۲) \quad y'' + ay' + by = 0$$

ساده می‌شود (در اینجا اصطلاح " همگن " معنی کاملاً " متفاوتی با این اصطلاح در مسائل ۲۵ تا ۳۰ ، صفحات ۱۵۳۸ تا ۱۵۳۹ ، دارد .)

برای حل معادله غیرهمگن (۱) ، ابتدا معادله همگن مربوطه (۲) را مشروحاً " بررسی می‌کنیم . قضیه زیر دلیلش را توضیح خواهد داد .

قضیه ۱ (جواب عمومی معادله غیرهمگن) . جواب عمومی معادله غیرهمگن (۱) مساوی مجموع یک جواب خصوصی (۱) و جواب عمومی معادله همگن (۲) می‌باشد .

برهان . فرض کنیم y_1 جوابی دلخواه و y_2 جواب ثابتی از معادله غیرهمگن (۱) باشد . در این صورت ، $y_1' + ay_1' + by_1 = f(x)$ و $y_2' + ay_2' + by_2 = f(x)$ ، و با تفریق معادله دوم از اول ، به دست می‌آوریم

$$(y_1' + ay_1' + by_1) - (y_2' + ay_2' + by_2) = f(x) - f(x) = 0,$$

یا معادلاً

$$(y_1 - y_2)'' + a(y_1 - y_2)' + b(y_1 - y_2) = 0.$$

بنابراین ، $y_1 - y_2$ در معادله همگن (۲) صدق می‌کند ؛ یعنی ، $y_1 = y_2 + u$ که در آن u جوابی از (۲) می‌باشد . برای اتمام برهان ، باید نشان دهیم که مجموع y_2 و یک جواب دلخواه u از (۲) جوابی از (۱) است . اما این فوراً " از این نتیجه می‌شود که $y_2' + ay_2' + by_2 = f(x)$ و $u'' + au' + bu = 0$ که

$$(y_2 + u)'' + a(y_2 + u)' + b(y_2 + u) = (y_2' + ay_2' + by_2) + (u'' + au' + bu) = f(x) + 0 = f(x).$$

ما بررسی معادله همگن (۲) را با این امر شروع می‌کنیم که هرگاه y_1 و y_2 دو جواب از (۲) باشند ، آنگاه هر ترکیب خطی از y_1 و y_2 نیز چنین است ؛ یعنی ، هر عبارت به شکل $C_1y_1 + C_2y_2$ که در آن C_1 و C_2 ثابتهای دلخواهی هستند . این نتیجه فوری آن است که هرگاه $y_1' + ay_1' + by_1 = 0$ و $y_2' + ay_2' + by_2 = 0$ ، آنگاه

$$(C_1y_1 + C_2y_2)'' + a(C_1y_1 + C_2y_2)' + b(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1y_1' + C_2y_2' + aC_1y_1' + aC_2y_2' + bC_1y_1 + bC_2y_2$$

$$\begin{aligned} &= C_1(y_1'' + ay_1' + by_1) + C_2(y_2'' + ay_2' + by_2) \\ &= C_1(0) + C_2(0) = 0. \end{aligned}$$

حال طبیعی است بپرسیم که، به عکس، آیا هر جواب (۲) به صورت ترکیبی خطی از دو جواب معلوم y_1 و y_2 هست یا نه؛ در نتیجه، $y = C_1y_1 + C_2y_2$ جواب عمومی (۲) می‌باشد. همانطور که مثال زیر نشان می‌دهد، این در صورتی که جوابهای y_1 و y_2 نامحدودند درست نیست.

مثال ۱. معادله خطی همگن

$$(۳) \quad y'' - y = 0$$

را در نظر می‌گیریم. واضح است که $y_1 \equiv 0$ جواب (۳) است؛ و همین‌طور $e^x = y_2$ ، زیرا $(e^x)'' = (e^x)' = e^x$. اما $y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_2e^x$ نمی‌تواند جواب عمومی (۳) باشد، زیرا (۳) نیز دارای جواب $y = e^{-x}$ می‌باشد (این را امتحان کنید)، که مضرب ثابتی از e^x نیست. حتی اگر y_1 و y_2 هر دو ناصفر باشند، ممکن است $y = C_1y_1 + C_2y_2$ جواب عمومی (۳) نباشد. مثلاً، اگر $y_1 = 2e^x$ را اختیار کنیم، که جواب دیگری از (۳) است، می‌بینیم $y = C_1y_1 + C_2y_2 = (2C_1 + C_2)e^x = ke^x$ که در آن $k = 2C_1 + C_2$ ، ولی این نیز، به همان دلیل قبل، جواب عمومی (۳) نیست؛ یعنی، ثابتی چون k وجود ندارد که $e^{-x} = ke^x$.

مثال فوق نشان می‌دهد که اگر یکی از توابع y_1 و y_2 متحد صفر بوده یا یکی مضرب ثابتی از دیگری باشد، نمی‌توان گفت $y = C_1y_1 + C_2y_2$ جواب عمومی معادله همگن (۲) است. اما، بنابر قضیه زیر، که بدون برهان ذکر شده است، $y = C_1y_1 + C_2y_2$ با استثنا کردن حالات فوق جواب عمومی (۲) خواهد بود.

قضیه ۲ (جواب عمومی معادله همگن). فرض کنیم y_1 و y_2 دو جواب معادله همگن (۲) باشند به طوری که هیچیک متحد صفر و مضرب ثابتی از دیگری نباشد (ذیلاً "نشان می‌دهیم این جوابها همیشه وجود دارند). در این صورت، جواب عمومی (۲) عبارت است از

$$y = C_1y_1 + C_2y_2,$$

که در آن C_1 و C_2 ثابتهای دلخواهی هستند.

گوییم دو جواب y_1 و y_2 صادق در شرایط قضیه ۲ یک مجموعه اساسی از جوابهای معادله (۲) را تشکیل می‌دهند. لیکن، این مجموعه منحصر به فرد نمی‌باشد.

مثال ۲. در مثال ۱ دیدیم که هر دو تابع e^x و e^{-x} جواب معادله (۳) اند. هیچیک از توابع متحدصفر و یا مضرب ثابتی از دیگری نیست، لذا، $y_1 = e^x$ و $y_2 = e^{-x}$ یک مجموعه اساسی از جوابهای (۳) را تشکیل می دهند؛ و در نتیجه، (۳) جواب عمومی $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ را خواهد داشت. به آسانی می توان تحقیق کرد که توابع $y_1 = \cosh x$ و $y_2 = \sinh x$ مجموعه اساسی دیگری از جوابهای (۳) را تشکیل می دهند.

قضیه وجودی و یکتایی. دلیل حذف برهان قضیه ۲ این است که بر قضیه وجودی و یکتایی زیر مبتنی است که اگر چه معنی آن کاملاً روشن است، برهانش از حوصله این درس خارج می باشد. به ازای هر سه عدد حقیقی x_0, y_0, y'_0 ، یک و فقط یک جواب مانند $y = y(x)$ از معادله همگن (۲) وجود دارد که در شرایط اولیه

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$$

صدق می کند.

ما از این نتیجه در حل مسائل مقدار اولیه برای معادله (۲) تلویحاً استفاده می کنیم.

مثال ۳. جواب عمومی معادله همگن

$$(۴) \quad y'' + \omega^2 y = 0 \quad (\omega > 0)$$

را بیابید. همچنین، جواب خصوصی (۴) صادق در شرایط اولیه

$$(۴') \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

را پیدا کنید.

حل. هر تابع که با ضرب در ω^2 قرینه مشتق دوم خود شود جوابی از (۴) است. $\sin \omega x$ و $\cos \omega x$ دو تابع از این نوعند، زیرا

$$(\sin \omega x)'' = (\omega \cos \omega x)' = -\omega^2 \sin \omega x \quad \text{و} \quad (\cos \omega x)'' = (-\omega \sin \omega x)' = -\omega^2 \cos \omega x$$

به علاوه، هیچیک از این توابع متحدصفر نبوده و مضرب ثابتی از دیگری نیست (چرا نیست؟). لذا، طبق قضیه ۲، جواب عمومی (۴) مساوی است با

$$(۵) \quad y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x,$$

که در آن C_1 و C_2 ثابتهای دلخواهی هستند. با مشتقگیری از (۵) نتیجه می شود که

$$(۵') \quad y' = -\omega C_1 \sin \omega x + \omega C_2 \cos \omega x.$$

برای یافتن جوابی از (۴) که در شرایط (۴') صدق کند، در (۵) قرار می دهیم $x = 0, y = 1$ و در (۵') می گذاریم $x = 0, y' = -1$ و فوراً به دست می آوریم $C_1 = 1, C_2 = -1/\omega$.

انتخاب این مقادیر از C_1 و C_2 در (۵)، جواب خصوصی مطلوب

$$y = \cos \omega x - \frac{1}{\omega} \sin \omega x$$

به دست می‌آید.

مثال زیر موارد استعمال قضیه ۱ را در یافتن جواب عمومی یک معادله خطی غیر همگن نشان می‌دهد.

مثال ۴. معادله

$$(۶) \quad y'' - y = 2 - 3x$$

را حل کنید.

حل. بنابر قضیه ۱، جواب عمومی (۶) مجموع یک جواب خصوصی (۶) و جواب عمومی معادله همگن مربوطه $y'' - y = 0$ است. ما قبلاً "از مثال ۲ می‌دانیم که جواب عمومی $y'' - y = 0$ مساوی است با $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ ، و نگاهی به معادله (۶) آشکار می‌سازد که این معادله دارای جواب خصوصی $y = 3x - 2$ می‌باشد (توجه کنید که به ازای این y ، $y'' = 0$). لذا، جواب عمومی (۶) عبارت است از

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 3x - 2.$$

تحلیل معادله همگن. حال، به کمک قضیه ۲، به مسئله حل معادله خطی همگن کلی (۲) می‌پردازیم. برای این کار، نمایی $y = e^{rx}$ را در (۲) می‌گذاریم، به این امید که مقادیر ثابت r را بیابیم که به ازای آنها (۲) برقرار باشد. هرگاه $y = e^{rx}$ ، آنگاه $y' = r e^{rx}$ و $y'' = r^2 e^{rx}$ ؛ در نتیجه، این جانشانی $y'' + ay' + by = 0$ را به

$$(۷) \quad r^2 e^{rx} + a r e^{rx} + b e^{rx} = (r^2 + ar + b) e^{rx} = 0$$

تبدیل می‌کند. اما e^{rx} هرگز صفر نیست؛ و در نتیجه، (۷) برقرار است اگر و فقط اگر r جواب معادله درجه دو

$$(۸) \quad r^2 + ar + b = 0,$$

به نام معادله مشخصی (۲)، باشد.

با کامل کردن مربعها در (۸)، به دست می‌آوریم

$$\left(r + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b = 0,$$

یا معادلا"

$$\left(r + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2 - 4b}{4},$$

که از این نتیجه می‌شود که (۸) دو ریشه متمایز

$$r_1 = -\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad r_2 = -\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

دارد اگر $a^2 - 4b > 0$ ، یا فقط یک ریشه (مضاعف)

$$(9) \quad r_1 = r_2 = -\frac{a}{2}$$

دارد اگر $a^2 - 4b = 0$ ، و ریشه حقیقی ندارد اگر $a^2 - 4b < 0$. هر یک از این سه حالت به مجموعه‌ای اساسی از جوابهای معادله (۲) منجر می‌شود، ولی ماهیت جوابها در هر حالت متفاوت می‌باشد.

هرگاه $a^2 - 4b^2 > 0$ ، آنگاه $e^{r_1 x}$ و $e^{r_2 x}$ قبلا "مجموعه‌ای اساسی از جوابها را تشکیل می‌دهند، زیرا هیچیک متحد صفر نبوده و ضرب ثابتی از دیگری نمی‌باشد؛ در واقع، هر تساوی به شکل $e^{r_1 x} = k e^{r_2 x}$ (k ثابت) فقط می‌تواند در نقطه $x = (\ln k)/(r_1 - r_2)$ برقرار باشد. لذا، قضیه ۲ در این حالت به ما می‌گوید که جواب عمومی معادله همگن (۲) به صورت زیر است:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

مثال ۵. جواب عمومی

$$(10) \quad y'' + y' - 6y = 0$$

را بیابید.

حل. معادله مشخص عبارت است از

$$r^2 + r - 6 = (r - 2)(r + 3) = 0,$$

که ریشه‌های متمایز $r_1 = 2$ و $r_2 = -3$ دارد. لذا، جواب عمومی (۱۰) مساوی است با

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x},$$

که در آن C_1 و C_2 ثابتهای دلخواهی می‌باشند.

هرگاه $a^2 - 4b = 0$ ، آنگاه $e^{r_1 x} = e^{-ax/2}$ ، $y_1 = e^{r_1 x} = e^{-ax/2}$ جواب معادله همگن $y'' + ay' + by = 0$

است، ولی برای تشکیل یک مجموعهٔ اساسی با y_1 به جواب دیگری چون y_2 نیاز داریم. برای یافتن آن به ترفند سادهٔ زیر پناه می‌بریم. فرض کنیم $y = ue^{-ax/2}$ ، که در آن $u = u(x)$ تابع مجهول جدیدی است. در این صورت،

$$y' = u'e^{-ax/2} - \frac{a}{2}ue^{-ax/2},$$

$$y'' = u''e^{-ax/2} - au'e^{-ax/2} + \frac{a^2}{4}ue^{-ax/2},$$

در نتیجه، $y'' + ay' + by = 0$ به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} (11) \quad & \left(u'' - au' + \frac{a^2}{4}u\right)e^{-ax/2} + a\left(u' - \frac{a}{2}u\right)e^{-ax/2} + bu e^{-ax/2} \\ & = \left(u'' + bu - \frac{a^2}{4}u\right)e^{-ax/2} = \left(u'' + \frac{4b - a^2}{4}u\right)e^{-ax/2} = u''e^{-ax/2} = 0, \end{aligned}$$

که در آن از $4b - a^2 = 0$ استفاده شده است. چون هرگز صفر نیست، نتیجه می‌شود که $u'' = 0$ ، ایجابگر آنکه

$$u' = A, \quad u = Ax + B,$$

که در آن A و B ثابت می‌باشند. چون فقط به جواب u نیاز داریم، انتخاب سادهٔ $A = 1$ و $B = 0$ را می‌کنیم که نتیجه می‌دهد که $u = x$. در این صورت، معلوم می‌شود که

$$y_2 = ue^{-ax/2} = xe^{-ax/2}$$

جواب دیگری از معادلهٔ همگن است. هیچیک از جوابهای $y_1 = e^{-ax/2}$ و $y_2 = xe^{-ax/2}$ متحد صفر نبوده و ضرب ثابتی از دیگری نیست، و در واقع، یک معادله به شکل $kxe^{-ax/2} = e^{-ax/2}$ (ثابت k) فقط می‌تواند در نقطهٔ $x = 1/k$ برقرار شود. لذا، در این حالت، جواب عمومی (۲) مساوی است با

$$y = C_1e^{-ax/2} + C_2xe^{-ax/2}.$$

مثال ۶. جواب عمومی

$$(12) \quad y'' - 4y' + 4y = 0$$

را بیابید.

حل. معادلهٔ مشخص عبارت است از

$$r^2 - 4r + 4 = (r - 2)^2 = 0,$$

که فقط یک ریشهٔ مضاعف ($r_1 = r_2 = 2$) را دارد. از (۹) معلوم می‌شود که این مقدار

ثابت $a/2$ - نیز هست. لذا، جواب عمومی (۱۲) مساوی است با

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

اگر $a^2 - 4b < 0$ ، معادلهٔ مشخص (۸) ریشهٔ حقیقی ندارد؛ در نتیجه، جوابی به شکل e^{ax} وجود ندارد. با اینحال، می‌توان یک مجموعهٔ اساسی از جوابهای (۲) را به آسانی به دست آورد. برای این کار، از همان جانشانی $y = ue^{-ax/2}$ در حالت $a^2 - 4b = 0$ استفاده می‌کنیم. با توجه به (۱۱)، معلوم می‌شود که معادلهٔ $y'' + ay' + by = 0$ مجدداً ایجاب می‌کند که

$$(13) \quad \left(u'' + \frac{4b - a^2}{4} u \right) e^{-ax/2} = 0,$$

ولی در اینجا ضریب u صفر نبوده بلکه عددی مثبت می‌باشد. در واقع، فرض کنیم

$$\omega = \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} > 0.$$

در این صورت، (۱۳) معادل است با

$$u'' + \omega^2 u = 0,$$

زیرا $e^{-ax/2}$ هرگز صفر نیست، و همانطور که از مثال ۳ می‌دانیم، جواب عمومی این معادله مساوی است با

$$u = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x.$$

لذا، جواب عمومی (۲)، یعنی $y = ue^{-ax/2}$ ، خود مساوی است با

$$y = e^{-ax/2} (C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x).$$

مثال ۷. جواب عمومی

$$(14) \quad y'' + 8y' + 25y = 0$$

را بیابید.

حل. در اینجا $a = 8$ و $b = 25$ ؛ در نتیجه، $a^2 - 4b = 64 - 100 = -36 < 0$ و

لذا، جواب عمومی (۱۴) مساوی است با $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{36} = 3$

$$y = e^{-4x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

روش ضرایب نامعین. درخاتمه، به حل معادلهٔ غیرهمگن (۱) به شکل $y'' + ay' + by = f(x)$ روش ضرایب نامعین.

می‌پردازیم. از قضیه ۱ به یاد دارید که جواب عمومی (۱) مجموع یک جواب خصوصی (۱) و جواب عمومی معادله همگن مربوطه $y'' + ay' + by = 0$ ، که اغلب معادله تحویل یافته (۱) نام دارد، می‌باشد. اما هم اینک طرز به دست آوردن جواب عمومی معادله تحویل یافته را نشان دادیم. لذا، آنچه اکنون بدان نیاز داریم یک جواب خصوصی خود معادله غیرهمگن (که اغلب معادله تام نامیده می‌شود) است. یافتن این جواب در حالت کلی مشکل است، ولی خوشبختانه تکنیک مؤثری، به نام روش ضرایب نامعین، وجود دارد که در صورتی کارگر است که $f(x)$ توابع متداولی چون

$$P_n(x)e^{\alpha x} \cos \beta x \quad (15)$$

$$P_n(x)e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad (15')$$

شامل چند جمله‌ای معلوم

$$P_n(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$$

از درجه n باشد. در واقع، فرض کنیم

$$A_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

$$B_n(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$$

دو چند جمله‌ای دیگر از درجه n ولی با ضرایب نامعین (یعنی، فعلاً "مجهول") a_0, a_1, \dots, a_n و b_0, b_1, \dots, b_n بوده، و $f(x)$ به شکل (۱۵) یا (۱۵') باشد. در این صورت، می‌توان نشان داد که جانشانی

$$\begin{aligned} y &= [A_n(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + B_n(x)e^{\alpha x} \sin \beta x]x^k \\ (16) \quad &= \sum_{i=1}^n (a_i x^{i+k} e^{\alpha x} \cos \beta x + b_i x^{i+k} e^{\alpha x} \sin \beta x) \end{aligned}$$

معادله غیرهمگن $y'' + ay' + by = f(x)$ را به معادله‌ای تبدیل می‌کند که با انتخاب مناسبی از ضرایب a_0, a_1, \dots, a_n و b_0, b_1, \dots, b_n متحداً برقرار است. در اینجا x^k ($k = 0, 1, 2$) کوچکترین توان لازم از x است که هیچیک از جملات $a_i x^{i+k} e^{\alpha x} \cos \beta x$ و $b_i x^{i+k} e^{\alpha x} \sin \beta x$ سمت راست (۱۶) جوابی از معادله تحویل یافته $y'' + ay' + by = 0$ نباشد. جانشانی (۱۶) را می‌توان فقط با

$$y = A_n(x)x^k \quad (17)$$

تعویض کرد اگر $f(x) = P_n(x)$ ، نظیر به $\alpha = \beta = 0$ در (۱۶)، و فقط با

$$y = A_n(x)x^k e^{\alpha x} \quad (17')$$

عوض کرد اگر $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ ، نظیر به $\beta = 0$ در (۱۶). از آن سو، اگر $f(x) = P_n(x) \cos \beta x$ یا $f(x) = P_n(x) \sin \beta x$ ، نظیر به $\alpha = 0$ در (۱۵) یا (۱۵')، تمام عبارت (۱۸) مورد نیاز می باشد.

مثال ۸. جواب عمومی

$$(19) \quad y'' - y' - 2y = x^2 + x - 4$$

را بیابید.

حل. طرف راست (۱۹) به شکل (۱۵) است به ازای $n = 2$ و $\alpha = \beta = 0$. چون هیچیک از توابع $y = a_i x^i$ ($i = 0, 1, 2$) جواب معادله^۶ تحویل یافته^۶ $y'' - y' - 2y = 0$ نیست، جانشانی

$$(19') \quad y = Ax^2 + Bx + C,$$

نظیر به فرمول (۱۷) به ازای $n = 2$ و $k = 0$ را انجام می دهیم. برای سادگی، ضرایب نامعین را با حروف متوالی A ، B ، C و نشان می دهیم. در این صورت،

$$y' = 2Ax + B, \quad y'' = 2A,$$

و جانشانی (۱۹') معادله^۶ (۱۹) را به معادله^۶

$$2A - (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + x - 4$$

تبدیل می کند، که نسبت به x همانی است اگر و فقط اگر توانهای یکسان x در طرفین معادله ضرایب یکسان داشته باشند. این شرط به دستگاه " مثلثی " از معادلات جبری خطی

$$-2A = 1,$$

$$-2A - 2B = 1,$$

$$2A - B - 2C = -4$$

منجر می شود با جواب $A = -\frac{1}{2}$ ، $B = 0$ ، $C = \frac{3}{2}$ (متوالیا "نسبت به A ، B ، C حل کنید). معادله^۶ (۱۹) به ازای این ضرایب به شکل زیر درمی آید:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2},$$

که یک جواب خصوصی (۱۹) است. معادله^۶ مشخص معادله^۶ تحویل یافته^۶ $y'' - y' - 2y = 0$ عبارت است از $r^2 - r - 2 = (r - 2)(r + 1) = 0$ ، که دارای ریشه های متمایز $r_1 = 2$ و $r_2 = -1$ می باشد. لذا، جواب عمومی معادله^۶ تحویل یافته عبارت است از $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$.

و از قضیه ۱ معلوم می‌شود که جواب عمومی معادله (۱۹) مساوی است با

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2}$$

مثال ۹. جواب عمومی

$$(20) \quad y'' - y' = x^2 + x - 4$$

را بیابید.

حل. توجه کنید که طرف چپ (۲۰) با (۱۹) در غیبت جمله $-2y$ فرق دارد. در نتیجه یکی از توابع $y = a_i x^i$ ، یعنی $y = a_0 x^0 = a_0$ ، جواب معادله تحویل یافته $y'' - y' = 0$ است. لذا، به جای جانشانی (۱۹)، باید جانشانی

$$(20') \quad y = Ax^3 + Bx^2 + Cx,$$

نظیر به فرمول (۱۷) به ازای $k = 1$ و $n = 2$ را انجام دهیم. در این صورت،

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad y'' = 6Ax + 2B,$$

و جانشانی (۲۰') معادله (۲۰) را به معادله

$$(6Ax + 2B) - (3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2 + x - 4$$

تبدیل می‌کند. از متحد گرفتن ضرایب توانهای یکسان x در دو طرف این معادله، دستگاه زیر به دست می‌آید:

$$-3A = 1,$$

$$6A - 2B = 1,$$

$$2B - C = -4,$$

که دارای جواب $A = -\frac{1}{3}$ ، $B = -\frac{3}{2}$ ، $C = 1$ می‌باشد. معادله (۲۰') به ازای این ضرایب به صورت زیر درمی‌آید:

$$y = -\frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + x.$$

معادله مشخص معادله تحویل یافته $y'' - y' = 0$ عبارت است از $r^2 - r = r(r - 1) = 0$ با ریشه‌های متمایز $r_1 = 0$ و $r_2 = 1$. لذا، جواب عمومی معادله تحویل یافته مساوی است با $y = C_1 + C_2 e^x$ ، و بنابر قضیه ۱، جواب عمومی معادله (۲۰) عبارت است از

$$y = C_1 + C_2 e^x - \frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + x.$$

مثال ۱۰. جواب عمومی

$$(21) \quad y'' - 2y' + y = 2e^x + \cos x$$

را بیابید.

حل. هرگاه y_1 جواب خصوصی

$$(22) \quad y'' - 2y' + y = 2e^x$$

و y_2 جواب خصوصی

$$(22') \quad y'' - 2y' + y = \cos x$$

باشد، آنگاه $y_1 + y_2$ جواب خصوصی (۲۱) است. هر دو معادله (۲۲) و (۲۲') دارای معادله تحویل یافته $y'' - 2y' + y = 0$ و معادله مشخص $r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2$ بهاریشه (مضاعف) $r_1 = r_2 = 1$ می‌باشند. لذا، طبق استدلال بعداز مثال ۵، جواب عمومی معادله تحویل یافته عبارت است از $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$. پس e^{2x} و $x e^{2x}$ جوابهای معادله تحویل یافته می‌باشند. لذا، برای حل (۲۲)، جانشانی

$$y = y_1 = A x^2 e^x,$$

نظیر به فرمول (۱۷) به ازای $n = 0$ ، $\alpha = 1$ ، و $k = 2$ را انجام می‌دهیم. چون

$$y_1' = (2 + 4x + x^2) A e^x, \quad y_1'' = (2x + x^2) A e^x,$$

این جانشانی (۲۲) را به

$$[(2 + 4x + x^2) - 2(2x + x^2) + x^2] A e^x = 2A e^x = 2e^x$$

تبدیل می‌کند، که از آن $A = 1$ نتیجه می‌شود. لذا، به آسانی معلوم می‌شود که $y_1 = x^2 e^x$ جواب خصوصی (۲۲) می‌باشد.

و اما در مورد معادله (۲۲')، چون $\sin x$ و $\cos x$ جواب معادله تحویل یافته نیستند،

جانشانی

$$y = y_2 = A \cos x + B \sin x,$$

نظیر به فرمول (۱۸) به ازای $n = 0$ ، $\beta = 1$ ، و $k = 0$ را انجام می‌دهیم. چون

$$y_2' = -A \sin x + B \cos x, \quad y_2'' = -A \cos x - B \sin x,$$

این جانشانی (۲۲') را به

$$\begin{aligned} & (-A \cos x - B \sin x) - 2(-A \sin x + B \cos x) + (A \cos x + B \sin x) \\ & = 2A \sin x - 2B \cos x = \cos x \end{aligned}$$

تبدیل می‌کند، که از آن $A = 0$ ، $B = -\frac{1}{2}$ نتیجه خواهد شد. لذا، به آسانی معلوم می‌شود که $y_2 = -\frac{1}{2} \sin x$ جواب خصوصی (۲۲') می‌باشد. با افزودن جوابهای خصوصی y_1 و y_2

معادلات (۲۲) و (۲۳) به هم، جواب خصوصی

$$y_1 + y_2 = x^2 e^x - \frac{1}{2} \sin x$$

معادله اصلی (۲۱) به دست می‌آید. ولی جواب عمومی معادله تحویل یافته $y'' - 2y' + y = 0$ عبارت است از $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$ ؛ و در نتیجه، جواب عمومی (۲۱) خواهد بود

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + x^2 e^x - \frac{1}{2} \sin x.$$

تبصره. درحالاتی که روش ضرایب نامعین به کار نمی‌روند، سعی کنید از روش تغییر پارامتر، که مقدم بر مسائل ۱۹ تا ۲۴، صفحه ۵۷۴ توصیف شده است، استفاده نمایید.

مسائل

جواب عمومی معادله خطی همگن داده شده را بیابید.

$$y'' - 2y' - y = 0 \quad . ۱$$

$$y'' - 4y' + 13y = 0 \quad . ۳$$

$$y'' + 10y' + 25y = 0 \quad . ۵$$

$$\frac{1}{2}y'' - 2y' + 4y = 0 \quad . ۷$$

$$4y'' - 8y' + 5y = 0 \quad . ۹$$

$$3y'' + 7y' + 2y = 0 \quad . ۱۱$$

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \quad . ۲$$

$$y'' + 4y' + 29y = 0 \quad . ۴$$

$$5y'' + 3y' = 0 \quad . ۶$$

$$y'' + 9y' + 14y = 0 \quad . ۸$$

$$y'' - 2\sqrt{2}y' + 2y = 0 \quad . ۱۰$$

$$y'' - 12y' + 52y = 0 \quad . ۱۲$$

جواب خصوصی $y = y(x)$ معادله خطی همگن داده شده را که در شرایط ذکر شده صدق می‌کند پیدا نمایید. بعضی شرایط اولیه‌اند، بقیه شرایط مرزی می‌باشند (ر. ک. صفحه ۴۲۲).

$$y' + y' - 2y = 0, y(0) = 1, y(\ln 2) = 0 \quad . ۱۳$$

$$y'' + y' = 0, y(1) = 0, y'(1) = 3 \quad . ۱۴$$

$$y'' - 2y' + 2y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2 \quad . ۱۵$$

$$y'' - 2y' + y = 0, y(0) = 0, y(1) = 1 \quad . ۱۶$$

$$7y'' + 19y' + 13y = 0, y(0) = y'(0) = 0 \quad . ۱۷$$

$$y'' + y = 0, y'(0) = 1, y'(\pi/4) = 0 \quad . ۱۸$$

یک جواب خصوصی معادله خطی غیرهمگن $y'' + y = f(x)$ را، که در آن $f(x)$ تابع داده شده است، بیابید.

$$\cos x + 4x - 5 \quad . ۲۰$$

$$(x + 1)^3 \quad . ۱۹$$

$\sinh x$. ۲۲	$\cos 3x$. ۲۱
$\sin x \sin 2x$. ۲۴	$e^x + \sin x$. ۲۳
$e^x \cos x$. ۲۶	$x \sin x$. ۲۵

جواب عمومی معادله خطی غیرهمگن داده شده را بیابید .

$$y'' + 4y' = 3x^2 - x + 2 \quad . ۲۷$$

$$y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} \quad . ۲۸$$

$$y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x \quad . ۲۹$$

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cos x \quad . ۳۰$$

$$y'' - 2y' + y = xe^x \quad . ۳۱$$

$$y'' + 3y' = xe^{-3x} \quad . ۳۲$$

$$y'' - y' = x^4 \quad . ۳۳$$

$$y'' + 2y' + y = 2 \cosh x \quad . ۳۴$$

$$y'' - 2y' - 8y = e^{6x} \quad . ۳۵$$

$$y'' - 5y' + 6y = e^{3x} + e^{2x} \quad . ۳۶$$

۳۷ . مسئله مقدار اولیه $e^{2x} + x^2 - 1, y(0) = -1, y'(0) = 1$ را حل نمایید .

۳۸ . مسئله مقدار مرزی $y'' + y' = x, y(0) = 1, y(1) = 0$ را حل نمایید .

۴.۱۶ حرکت توافقی ساده؛ نوسانات میرا و واداشته

فرض کنیم P ذره‌ای باشد که موضعش با تنها مختص $y(t) = y$ که تابعی از زمان t است مشخص شود. در این صورت، گوییم P حرکت توافقی ساده دارد اگر مختص y در یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم به شکل

$$1) \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \quad (\omega > 0)$$

صدق نماید. همانطور که از مثال ۳، صفحه ۱۵۴۸، می‌دانیم (پس از تغییر متغیر مستقل به t)، جواب عمومی این معادله عبارت است از

$$2) \quad y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t,$$

که در آن C_1 و C_2 ثابتهای دلخواهی می‌باشند.

برای توضیح ماهیت حرکت P ، معادله (۲) را به طریقی دیگر می‌نویسیم. فرض کنیم A و ϕ ($A > 0$) مختصات قطبی نقطه (C_2, C_1) ، به عنوان نقطه‌ای در دستگاه مختصات

قائم ، باشد . در این صورت ،

$$(۳) \quad A \cos \phi = C_2, \quad A \sin \phi = C_1,$$

در نتیجه ، $C_1^2 + C_2^2 = A^2(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = A^2$ ، یا معادلا

$$(۴) \quad A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}.$$

همچنین ، از تلفیق فرمولهای (۲) و (۳) معلوم می شود که

$$y = A \cos \omega t \sin \phi + A \sin \omega t \cos \phi,$$

که به

$$(۵) \quad y = A \sin(\omega t + \phi)$$

ساده می گردد . به بیان دیگر ، با انتخاب A و ϕ به عنوان مختصات قطبی نقطه $(C_1, -C_2)$ ،

داریم $A \cos \phi = C_1$ و $A \sin \phi = -C_2$ ، که مجدداً از (۴) به دست می آید ، ولی

اینجا به آسانی معلوم می شود که به جای (۵)

$$(۵') \quad y = A \cos(\omega t + \phi).$$

توجه کنید که مقدار زاویه ϕ در $(۵')$ $\pi/2$ از مقدار در (۵) کمتر است .

از روابط (۵) و (۵') واضح است که یک ذره با حرکت توافقی ساده در امتداد محور

y بالا و پایین می رود و پس از مدت زمان

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

به نام دوره تناوب نوسانات ، حرکتش را تکرار می کند . توجه کنید که T دوره تناوب

اساسی هر دو تابع $\sin(\omega t + \phi)$ و $\cos(\omega t + \phi)$ است . گوییم نوسانات توصیف شده با (۵)

یا (۵') نوسانات توافقی سینوس گون می باشند . متقابل T ، یعنی

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi},$$

فرکانس نام دارد ، و اگر زمان به ثانیه باشد ، f به دور بر ثانیه (cps) خواهد بود ؛ واژه

" دور " دلالت بر یک دور کامل حرکت ذره می باشد . یک دور بر ثانیه را به افتخار فیزیکدان

تجربی آلمانی ، هنریش هرتز^۱ (۱۸۹۴-۱۸۵۷) ، اولین کسی که امواج رادیویی تولید

کرد ، یک هرتز (Hz) می نامند . کمیت ω فرکانس زاویه ای نام دارد ، و با رادیان بر ثانیه

سنجیده می شود . کمیت A را دامنه A می نامند ، و عبارت است از ماکزیمم $|y|$. در واقع ،

ذره P بین دو موضع اکستریم $y = A$ و $y = -A$ جلو و عقب می‌رود. شناسه $\omega t + \phi$ هر دو تابع $\sin(\omega t + \phi)$ و $\cos(\omega t + \phi)$ فاز نام دارد، و زاویه ϕ که مقدار فاز در لحظه $t = 0$ است، فاز اولیه نامیده می‌شود. بر حسب فرکانس f ، می‌توان رابطه (δ) را به صورت

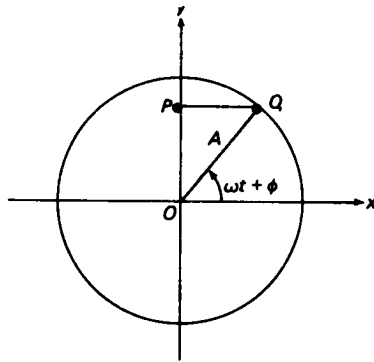
$$(۶) \quad y = \sin(2\pi ft + \phi)$$

و رابطه (δ') را به صورت

$$(۶') \quad y = \cos(2\pi ft + \phi)$$

نوشت.

ارتباط جالب و مهمی بین حرکت توافقی ساده و حرکت مستدیر یکنواخت وجود دارد (ر. ک. صفحه ۱۱۰۷). فرض کنیم نقطه Q با تندی زاویه‌ای ω در جهت خلاف عقربه‌های ساعت حول دایره $x^2 + y^2 = A^2$ به شعاع A و به مرکز O دوران کند. در این صورت، زاویه بین شعاع OQ و محور x مثبت در لحظه t مساوی است با $\omega t + \phi$ ، که در آن ϕ زاویه بین OQ و محور x مثبت در لحظه $t = 0$ است (ر. ک. شکل ۳). فرض کنیم P تصویر Q روی محور y باشد. در این صورت، وقتی Q حول دایره $x^2 + y^2 = A^2$ می‌چرخد، نقطه



شکل ۳

P در امتداد محور y بالا و پایین رفته حرکت توافقی ساده (δ') را با دامنه A ، فرکانس زاویه‌ای ω ، فاز $\omega t + \phi$ ، و فاز اولیه ϕ انجام می‌دهد. همچنین، وقتی Q حول دایره می‌چرخد، تصویر Q روی محور x حرکت توافقی ساده (δ) با x به جای y خواهد داشت.

مثال ۱. حرکت توافقی ساده

$$(۷) \quad y = 3 \cos 4\pi t + 4 \sin 4\pi t$$

را توصیف کنید.

حل. معادله (۷) به شکل (۲) است که در آن $C_1 = 3$ و $C_2 = 4$. لذا، طبق (۴)،

$$A = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5,$$

و معادله (۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(۷) \quad y = 5 \sin(2\pi ft + \phi) = 5 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right),$$

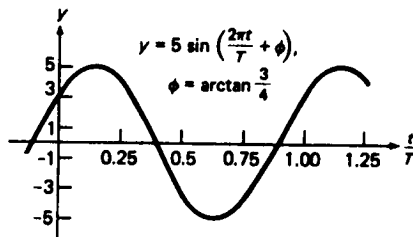
که در آن $f = 2 \text{ cps}$ ، $T = 1/f = 0.5 \text{ sec}$ ، و

$$\phi = \arctan \frac{3}{4} \approx 0.6435 \text{ rad} \approx 36.87^\circ$$

(معادله دوم (۳) را بر معادله اول تقسیم کرده و آن را نسبت به ϕ حل می‌کنیم).

نمودار تابع (۷) در شکل ۴ نموده شده است، که در آن می‌بینید که مقدار y در $t = 0$

مساوی است با $C_1 = 3$ با $5 \sin \phi = C_1 = 3$



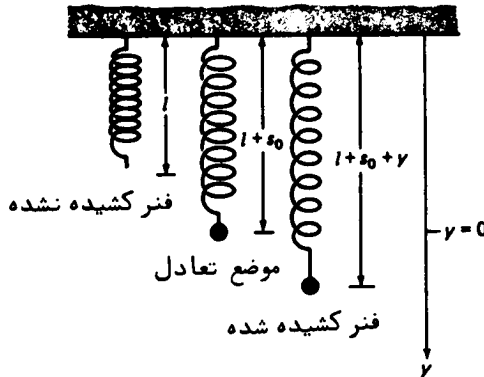
شکل ۴

نوسانگر توافقی (حالت غیر میرا)، هر دستگاه مکانیکی با حرکت توافقی ساده یک نوسانگر توافقی نام دارد. این دستگاه در مثال زیر توصیف می‌شود.

مثال ۲. یک گلوله به جرم m به انتهای پایینی فنری وصل شده است، و انتهای بالایی آن به تکیه‌گاه افقی محکمی متصل گشته است. فرض کنید در لحظه $t = 0$ به گلوله تغییر مکان اولیه y_0 و سرعت v_0 داده شده باشد. حرکت گلوله را در صورتی تعیین کنید که گلوله (به عنوان ذره) تحت اثر هیچ نیرویی جز وزنش و کشش فنر نباشد.

حل. بنابر قانون هوک^۱ (ر.ک. صفحه ۴۳۱)، هر گلوله نیروی بازگردان الاستیک $F = -ks$

وارد می‌شود، که در آن k ثابت مثبتی به نام سختی یا ثابت فنر بوده و s اختلاف طول فنر کشیده شده و کشیده نشده یا طول طبیعی l می‌باشد. بر گوی نیروی وزنش mg نیز اثر دارد، که فنر را به طول تعادلش $l + s_0$ می‌کشاند، که در آن $mg = ks_0$ (چرا؟). همانند شکل ۵، فرض کنیم محور y قائم و روبه پایین با مبدأ $(y = 0)$ در موضع



شکل ۵

تعادل گلوله باشد. در این صورت، نیروی کل وارد بر گلوله در موضع جابجا شده به مختص $y = y(t)$ مساوی است با

$$F = mg - ks = mg - k(s_0 + y) = -ky,$$

و در نتیجه، طبق قانون دوم حرکت نیوتن،

$$(۸) \quad my'' = -ky,$$

که در آن پریم مشتقگیری نسبت به t را نشان می‌دهد، یا معادلاً، برحسب ثابت مثبت

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

اما این معادله دیفرانسیلی است که به حرکت توافقی ساده منجر می‌شود. لذا، موضع گلوله در لحظه $t \geq 0$ مساوی است با

$$(۹) \quad y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

برای تعیین ثابتهای C_1 و C_2 ، شرایط اولیه $y(0) = y_0$ و $y'(0) = v_0$ را اعمال می‌کنیم.

با گذاردن $y = y_0$ در فرمول (۹) و $y' = v_0$ در فرمول

$$(۹') \quad y' = -\omega C_1 \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t,$$

حاصل از مشتقگیری از (۹) نسبت به t ، خواهیم داشت $C_2 = v_0/\omega$ و $C_1 = y_0$ ، لذا،

(۹) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$(۱۰) \quad y = A \sin(\omega t + \phi),$$

که در آن دامنه A و فاز اولیه ϕ از فرمولهای زیر به دست می‌آیند:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad \phi = \arctan \frac{C_1}{C_2} = \frac{\omega y_0}{v_0}.$$

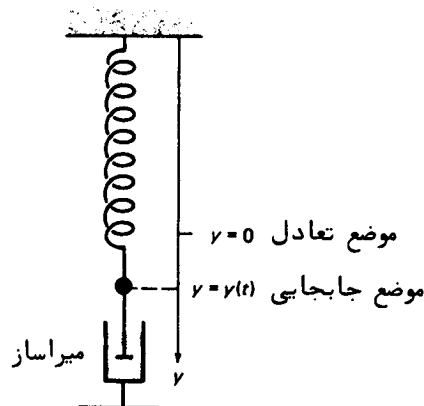
توجه کنید که هر قدر جرم گلوله کمتر و فنر سفت‌تر باشد، فرکانس

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

نوسانات (۱۰) بزرگتر است. همچنین، اگر گلوله وقت رها شدن در حال سکون باشد ($v_0 = 0$).

$$y = y_0 \cos \omega t$$

نوسانگر توافقی (حالت میرا). نوسانات مثال قبل غیرمیرا هستند؛ یعنی، با دامنه‌ای ثابت تا بی‌نهایت می‌روند. این یک وضع ایده‌آل است، زیرا در عمل دامنه نوسانات با زمان تحلیل می‌رود، و این به‌خاطر نیروهای ذاتی مقاومت، مانند اصطکاک در فنر یا مقاومت هوا، می‌باشد. در واقع، در بعضی حالات، عمداً یک نیروی مقاومت وارد می‌شود تا نوسانات "مستهلک شوند"، یا حتی از رویداد نوسانات در اول کار جلوگیری نماید. مثلاً، شکل ۶ تعدیلی از دستگاه مکانیکی مثال ۲ را نشان می‌دهد، که در آن پیستونی که به ته گلوله وصل شده در یک استوانه پر از مایعی چسبنده فرورفته است. اثر



شکل ۶

این مکانیسم میراکن، به نام میراساز، این است که برگلوله نیروی مقاومت اضافی $F_R = -bv$ وارد کند، که در آن b ثابت مثبتی است که ضریب میرایی نام دارد و $v = dy/dt = y'$ سرعت گلوله می باشد. حال قانون دوم نیوتن به جای (۸) نتیجه می دهد که

$$my'' = -by' - ky \quad (11)$$

یا معادلا"

$$y'' + 2\lambda y' + \omega^2 y = 0, \quad (12)$$

که در آن

$$2\lambda = \frac{b}{m}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

هرگاه دستگاه مکانیکی که از معادله دیفرانسیل (۱۲) تبعیت کند یک نوسانگر توافقی میرا نام دارد.

معادله مشخص (۱۲) عبارت است از

$$r^2 + 2\lambda r + \omega^2 = 0,$$

یا معادلا"

$$(r + \lambda)^2 = \lambda^2 - \omega^2,$$

با دو ریشه $r = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$ اگر $r > \omega$ ، یک ریشه $r = -\lambda$ اگر $r = \omega$ ، و بدون ریشه حقیقی اگر $r < \omega$. فرض کنیم

$$\alpha = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} \text{ اگر } \lambda > \omega, \quad \beta = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} \text{ اگر } \lambda < \omega.$$

در این صورت، بنابر روش توصیف شده در بخش ۳.۱۶، جواب معادله (۱۲) مساوی است با

$$y = e^{-\lambda t}(C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t}) \quad (13)$$

اگر $\lambda > \omega$ (حالت فوق میرا)

$$y = e^{-\lambda t}(C_1 + C_2 t) \quad (14)$$

اگر $\lambda = \omega$ (حالت به طور بحرانی میرا) ، و

$$y = e^{-\lambda t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) \quad (15)$$

اگر $\lambda < \omega$ (حالت تحت میرا) . با این فرض که گلوله ابتدا در موضع $y = y_0$ در حال سکون است که از آن با سرعت صفر رها شده است، شرایط اولیه

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0$$

را داریم، که حال با استفاده از آنها ثابتهای C_1 و C_2 را در هر یک از فرمولهای (۱۳)، (۱۴)

و (۱۵) تعیین می‌کنیم .

در حالت فوق میرا $(\lambda > \omega)$ ، از (۱۳) مشتق می‌گیریم :

$$y' = -\lambda e^{-\lambda t}(C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}) + \alpha e^{-\lambda t}(C_1 e^{\omega t} - C_2 e^{-\omega t}).$$

با گذاردن $t = 0, y = y_0$ در (۱۳) و $t = 0, y' = 0$ در فرمول اخیر ، دستگاه معادلات زیر به دست می‌آید :

$$C_1 + C_2 = y_0, \quad (\alpha - \lambda)C_1 - (\alpha + \lambda)C_2 = 0,$$

که جواب

$$C_1 = \frac{\alpha + \lambda}{2\alpha} y_0, \quad C_2 = \frac{\alpha - \lambda}{2\alpha} y_0.$$

را دارد ؛ در نتیجه ، (۱۳) شکل زیر را به خود می‌گیرد :

$$\begin{aligned} y &= y_0 e^{-\lambda t} \left(\frac{\alpha + \lambda}{2\alpha} e^{\omega t} + \frac{\alpha - \lambda}{2\alpha} e^{-\omega t} \right) \\ (16) \quad &= y_0 e^{-\lambda t} \left(\cosh \alpha t + \frac{\lambda}{\alpha} \sinh \alpha t \right). \end{aligned}$$

در حالت به‌طور بحرانی میرا $(\lambda = \omega)$ ، از (۱۴) مشتق می‌گیریم :

$$y' = -\lambda e^{-\lambda t}(C_1 + C_2 t) + C_2 e^{-\lambda t}.$$

با گذاردن $t = 0, y' = 0$ در فوق و $t = 0, y = y_0$ در (۱۴) ، فوراً " خواهیم داشت

$$C_1 = y_0, \quad -\lambda C_1 + C_2 = 0,$$

یا معادلاً " $C_1 = y_0, C_2 = \lambda y_0$ ؛ در نتیجه ، (۱۴) به صورت زیر درمی‌آید :

$$(17) \quad y = y_0 e^{-\lambda t} (1 + \lambda t).$$

در حالت تحت میرا $(\lambda < \omega)$ ، مشتق (۱۵) مساوی است با

$$y' = -\lambda e^{-\lambda t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) + \beta e^{-\lambda t}(-C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t).$$

لذا ، با قرار دادن $t = 0, y' = 0$ در فوق و $t = 0, y = y_0$ در (۱۵) ، بلافاصله خواهیم داشت

$$C_1 = y_0, \quad -\lambda C_1 + \beta C_2 = 0,$$

یا معادلاً " $C_1 = y_0, C_2 = \lambda y_0 / \beta$ ؛ در نتیجه ، (۱۵) به صورت زیر درمی‌آید :

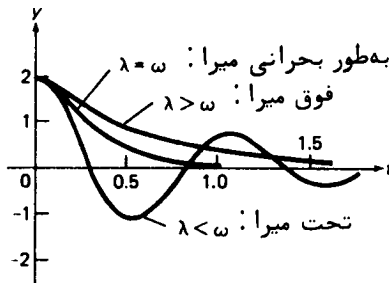
$$(18) \quad y = y_0 e^{-\lambda t} \left(\cos \beta t + \frac{\lambda}{\beta} \sin \beta t \right).$$

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که (۱۸) شکل زیر را نیز دارد :

$$(18') \quad y = y_1 e^{-\lambda t} \sin(\beta t + \phi),$$

که در آن $y_1 = y_0 \sqrt{1 + (\lambda/\beta)^2}$ و $\phi = \arctan(\beta/\lambda)$.

از رابطه (۱۸) واضح است که حرکت گلوله در حالت تحت میرا نوسانی است، ولی وقتی $t \rightarrow \infty$ ، نوسانات به خاطر وجود عامل نمایی e^{-t} به میزانی متناسب با اندازه λ "مستهلك می شوند" (اگر λ کوچک باشد، نوسانات می توانند مدت مدیدی دوام بیاورند، ولی در غیر این صورت به سرعت از بین می روند). فرکانس این نوسانات "بامیرایی نمایی" $\beta/2\pi$ است، و از فرکانس $\omega/2\pi$ نوسانات غیر میرا که در غیاب نیروهای مقاوم روی می دهند ($\lambda = 0$) کوچکتر است؛ در واقع، $\beta/2\pi$ را باید "شبه فرکانس" و $2\pi/\beta$ را "شبه دوره تناوب" نامید، زیرا نوسانات واقعا "متناوب نیستند". حرکت در حالات فوق میرا و به طور بحرانی میرا غیرنوسانی است. در واقع، تحلیل توابع (۱۶) و (۱۷) نشان می دهد که هر دو وقتی $t \rightarrow \infty$ تدریجا "به صفر نزول کرده، و هرگز از محور t رد نمی شوند. شکل ۷ نمودارهای (۱۶) تا (۱۸) را به ازای $y_0 = 2$ و $\omega = 6$ نشان می دهد؛ با $\lambda = 10$ در حالت فوق میرا،



شکل ۷

در نتیجه $\alpha = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} = 8$ و $\lambda = 10$ در حالت تحت میرا، در نتیجه

$$\beta = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} = \sqrt{35} \approx 5.92$$

توجه کنید که حرکت در حالت به طور بحرانی میرا سریعتر از حالت فوق میرا "مستهلك می شود".

نوسانات واداشته، بالاخره، نوسانات واداشته را در نظری می گیریم که در آن دستگاه نوسانات آزاد نبوده، بلکه تحت اثر مداوم نیروی خارجی به شکل $F_0 \cos \omega_0 t$ می باشد (یک نوسان توافقی با فرکانس $\omega_0/2\pi$ و دامنه F_0). فرض کنیم این نیرو بر گلوله شکل ۶ وارد شده باشد، و برای سادگی میراساز را برمی داریم؛ در نتیجه، نیروی مقاوم وجود ندارد. در این صورت، از قانون دوم نیوتن به جای (۸) داریم

$$my'' = -ky + F_0 \cos \omega_0 t$$

یا معادلا"

$$(۱۹) \quad y'' + \omega^2 y = f_0 \cos \omega_0 t,$$

که در آن $\omega = \sqrt{k/m}$ و $f_0 = F_0/m$ ، و فرض است که $\omega_0 \neq \omega$. معادله (۱۷) را به روش بخش ۳۰۱۶ حل می‌کنیم ، خواهیم داشت

$$(۲۰) \quad y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos \omega_0 t.$$

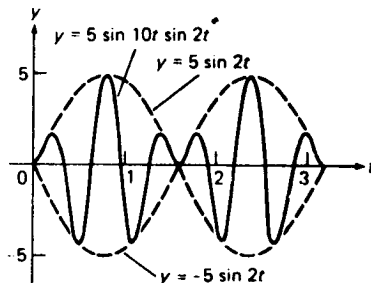
به آسانی معلوم می‌شود که دوجمله‌ء اول سمت راست جواب عمومی معادلهء تحویل یافتهء $y'' + \omega^2 y = 0$ را تشکیل می‌دهند ، ولی جملهء آخر جواب خصوصی معادلهء تام (۱۹) است . فرض کنیم گلوله ابتدا جابجا نشده و در حال سکون باشد . در این صورت ، $y(0) = y'(0) = 0$ ، و به آسانی می‌توان ثابتهای موجود در (۲۰) را یافت : $C_1 = -f_0/(\omega^2 - \omega_0^2)$ و $C_2 = 0$ ؛ در نتیجه ، رابطهء (۲۰) به صورت زیر درمی‌آید :

$$y = \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2} (\cos \omega_0 t - \cos \omega t),$$

که می‌توان آن را به کمک فرمول مسئلهء ۶۲ ، صفحهء ۱۰۰ ، به صورت زیر درآورد :

$$(۲۱) \quad y = \frac{2f_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin \left(\frac{1}{2}(\omega + \omega_0)t \right) \sin \left(\frac{1}{2}(\omega - \omega_0)t \right).$$

فرض کنیم $|\omega - \omega_0|$ در مقایسه با $\omega + \omega_0$ کوچک باشد . در این صورت ، (۲۱) نوسانی با تغییر سریع متناسب با $\sin \left(\frac{1}{2}(\omega + \omega_0)t \right)$ است که در نوسان با تغییر بیضی $\sin \left(\frac{1}{2}(\omega - \omega_0)t \right)$ " ضرب شده است " . لذا ، نوسان (۲۱) سریع است ، ولی " پوش " آن تغییرات متناوب کند دارد که به تپش معروفند . صدای تپشها در برد فرکانس قابل شنیدن ناموزون به گوش می‌رسد ؛ برای تحقیق این امر ، دو مهرهء مجاور یک پیانو را همزمان فشار دهید . شکل ۸ پدیدهء تپشها را برای حرکت $y = 5 \sin 10t \sin 2t$ ، که از (۲۱) با فرض $\omega = 12$ ، $\omega_0 = 8$



شکل ۸

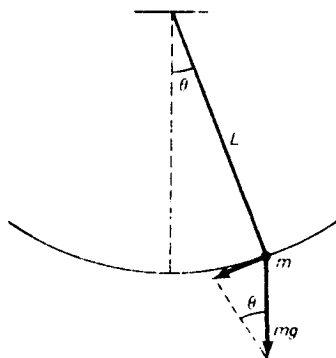
و $2f_0/(\omega^2 - \omega_0^2) = 5$ به دست می‌آید، نشان می‌دهد.

اگر $\omega_0 = \omega$ ، در نتیجه فرکانس "تابع نیروی" $F = F_0 \cos \omega_0 t$ با فرکانس طبیعی دستگاه آزاد یکی باشد، جواب دیگری از معادله دیفرانسیل (۱۹) به دست می‌آید که به پدیده مهم تشدید منجر خواهد شد (ر.ک. مسئله ۲۱).

مسائل

۱. نشان دهید هر نوسان به شکل (δ') را می‌توان به صورت (۵) با همان دامنه و فرکانس نوشت.
۲. نشان دهید هر نوسان توافقی با فرکانس منفی را می‌توان به صورت یک نوسان توافقی با فرکانس مثبت نوشت. لذا، فرض $\omega > 0$ خللی به کلیت وارد نمی‌سازد.
۳. طول تقریبی (در امتداد شیار) یک دوره تناوب از نوسانی سینوس‌گون به فرکانس 440 cps (A زیر وسط C) خارجی‌ترین شیار یک صفحه ۱۲ اینچی گرامافون که با سرعت $33\frac{1}{3}$ rpm (دور در دقیقه) می‌گردد را بیابید.
۴. نشان دهید که مجموع دو نوسان توافقی با فرکانس معلوم نوسان توافقی دیگری با همان فرکانس است.
۵. نشان دهید که تندی یک‌ذره با حرکت توافقی ساده در لحظاتی صفر است که فاصله ذره تا نقطه تعادل ماکزیمم باشد.
۶. نشان دهید که تندی یک ذره با حرکت توافقی ساده در زمانهایی ماکزیمم است که ذره از موضع تعادل می‌گذرد.
۷. یک ذره دارای حرکت توافقی ساده با دوره تناوب $T = \pi$ sec، موضع اولیه $y(0) = -8$ cm و سرعت اولیه $y'(0) = 12$ cm/sec است. دامنه A ، فرکانس زاویه‌ای ω ، و فاز اولیه ϕ حرکت را بیابید. ذره در چه لحظه t_1 از وضعیت تعادل عبور می‌کند؟
۸. فنری با وزنه 3-lb به اندازه 1.5 in کشیده شده است. فرض کنید وزنه 6 in زیر وضعیت تعادل کشیده شده و سپس با سرعت اولیه صفر رها گردد. موضع y و سرعت y' وزنه را یک‌چهارم ثانیه بعد پیدا کنید. (شتاب ثقل را مساوی 32 ft/sec² بگیرید.)
۹. برای تعیین وزن جسم مسئله قبل واقعا "به چه چیز نیاز داریم؟ جواب خود را توضیح دهید.
۱۰. دوره تناوب نوسان جسمی که از یک فنر آویزان است 1 sec می‌باشد. فرض کنید جسم از فنر قطع شود. فنر پس از رسیدن به حالت سکون چقدر کوتاهتر خواهد بود؟ زمین را به‌طور ایده‌آل یک گوی کروی همگن به شعاع $R = 3960$ میل گرفته، و فرض کنید در

- امتداد قطری از آن حفره‌ای ایجاد کرده باشیم . می‌توان (به کمک مسائل ۳۵ و ۳۶ بخش ۲۰۱۵) نشان داد که بر یک جسم داخل حفره نیروی جاذبه‌ای متناسب با فاصله‌اش تا مرکز زمین وارد می‌شود . فرض کنید جسمی از حال سکون به داخل حفره افتاده باشد .
- ۱۱ . زمان لازم T برای آنکه جسم به موضع اولیه‌اش در سطح زمین برسد چقدر است ؟
- ۱۲ . تندی v جسم را حین عبور از مرکز زمین پیدا نمایید .
- ۱۳ . نشان دهید که T و دوره تناوب و تندی ماهواره‌ای هستند که مدار مستدیر آن با زمین تماس دارد .
- ۱۴ . فرض کنید K انرژی جنبشی و V انرژی پتانسیل یک نوسانگر توافقی غیرمیرا باشند . مستقیماً با محاسبه نشان دهید که انرژی کل $E = K + V$ نوسانگر ثابت است .
- ۱۵ . فنری با وزنه 8-lb که به آن میراسازی با ضریب میرایی $b = 5 \text{ lb sec/ft}$ وصل است به اندازه 4 in کشیده شده است . فرض کنید وزنه به اندازه 6 in زیر وضعیت تعادل کشیده و سپس به آرامی رها شود . حرکت وزنه را تعیین نمایید .
- ۱۶ . فنری با وزنه 4-lb که به آن میراسازی با ضریب میرایی $b \text{ lb sec/ft}$ وصل است به اندازه 6 in کشیده شده است . حرکت به ازای چه مقادیری از b فوق میراست؟ به‌طور بحرانی میراست؟ تحت میراست؟
- ۱۷ . فرض کنید $(n = 0, 1, 2, \dots) A_n$ ماکزیممهای متوالی نوسانات توافقی میرای (۱۸) باشند در این صورت ، کمیت $\delta = \ln(A_n/A_{n+1})$ نزول لگاریتمی نام دارد . δ را برحسب ثابت β و شبه دوره تناوب $T = 2\pi/\beta$ ی نوسانات میرا بیان دارید .
- ۱۸ . نشان دهید که تغییرمکان v نوسانات به‌طور بحرانی میرای (۱۷) از تغییرمکان نوسانات تحت میرای (۱۶) به ازای هر $t > 0$ کمتر است .
- ۱۹ . شکل ۹ یک دستگاه مکانیکی آشنا ، به نام پاندول (ساده) را نشان می‌دهد ، که در



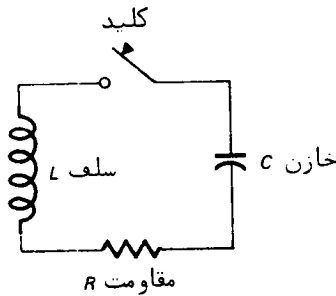
شکل ۹

آن گلوله‌ای به جرم m به نخ‌ی به طول L وصل بوده و در صفحه قائمی نوسان می‌کند. فرض کنید $\theta = \theta(t)$ تغییر مکان زاویه‌ای گلوله از وضعیت سکون بوده، و نخ بدون وزن باشد. نشان دهید که θ در معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

صدق می‌کند. حرکت پاندول را به ازای θ های آنقدر کوچک که تعویض $\sin \theta$ با θ موجه است توصیف نمایید. این تقریب "خطی‌سازی" معادل حذف تمام جملات سری توانی $\sin \theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \dots$ جز اولی است. دوره تناوب T پاندول در این حالت چقدر است؟

۲۰. یک مدار الکتریکی از سلف L هانری، مقاومت R اهم، و خازن C فاراد تشکیل شده است که به طور سری به هم وصل شده‌اند (ر.ک. شکل ۱۰). فرض کنید $q = q(t)$ و $i = i(t)$ بار خازن و شدت جریان مدار در لحظه t بوده، و ابتدا خازن بار داشته باشد ولی شدت جریانی در مدار موجود نباشد. نشان دهید که q و i نوسانی‌اند اگر و فقط اگر $R < 2\sqrt{L/C}$.



شکل ۱۰

۲۱. فرض کنید در معادله $\omega_0 = \omega$ (۱۹)؛ در نتیجه، فرکانس ω_0 تابع نیرو با فرکانس طبیعی دستگاه آزاد یکی است. معادله (۱۹) را حل کرده و نشان دهید نوسانات حاصل بزرگ می‌شوند تا جایی که فنر پاره می‌شود. این پدیده به پدیده تشدید معروف بوده، و می‌تواند به در هم شکستن ساختارهای مکانیکی منجر شود. برای احتراز از تشدید است که در عبور از پله‌های کوچک به سربازان دستور می‌دهند تا قدم‌هایشان را بشکنند.

۲۲. معادله (۱۹) را برای نوسانات واداشته در حالتی که میرایی وجود دارد، در نتیجه

(۱۹) جمله اضافی داشته و به شکل

$$y'' + 2\lambda y' + m^2 y = f_0 \cos \omega_0 t$$

است، حل کنید. با فرض $\frac{1}{2}\omega^2 < \lambda^2$ ، فرکانس تشدید را بیابید؛ یعنی، فرکانسی که به ازای آن نوسانات حالت پایدار حاصل ماکزیمم می‌باشند. دامنه نوسانات را به ازای $\omega = \omega_0$ بیابید.

اصطلاحات و مباحث کلیدی

معادلات دیفرانسیل خطی در مقابل غیرخطی

معادلات کامل، شرط کامل بودن

منحنیهای انتگرال

عاملهای انتگرالگیری

معادلات خطی مرتبه اول

معادلات خطی مرتبه دوم همگن (با ضرایب ثابت)

معادلات خطی مرتبه دوم غیر همگن

قضیه وجودی و یکتایی

مجموعه اساسی از جوابها

معادله مشخص

روش ضرایب نامعین

حرکت توافقی ساده، نوسانات توافقی

دوره تناوب، فرکانس، دامنه، و فاز

نوسانگر توافقی غیر میرا و میرا

فوق میرایی، میرایی بحرانی، تحت میرایی

نوسانات واداشته

مسائل تکمیلی

فرض کنید F خانواده‌ای از منحنیها در صفحه xy باشد. یک منحنی که به هر عضو F عمود

باشد یک مسیر قائم F نام دارد. به آسانی معلوم می‌شود که اگر F از منحنیهای انتگرال

معادله دیفرانسیل

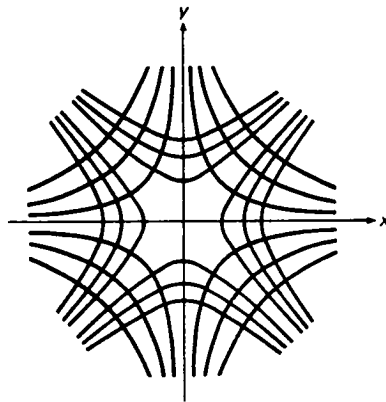
(یک)

$$y' = f(x, y).$$

تشکیل شده باشد که در آن $f(x, y) \neq 0$ ، آنگاه هر مسیر قائم F یک منحنی انتگرال معادله

(دو)
$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}$$

است، زیرا حاصل ضرب شیب یک منحنی انتگرال (یک) در شیب یک منحنی انتگرال (دو) در هر نقطه اشتراک دو منحنی مساوی ۱- است. مثلاً، فرض کنیم F از تمام هذلولیهای $x^2 - y^2 = C$ تشکیل شده است، که در آن C ثابت دلخواهی است. در این صورت، هر عضو F منحنی انتگرال معادله $y' = x/y$ است (از $x^2 - y^2 = C$ به طور ضمنی مشتق گرفته و سپس نسبت به y حل کنید). و لذا، هر مسیر قائم F منحنی انتگرال معادله $y' = -y/x$ یا معادلاً $y dx + x dy = 0$ ، است با جواب عمومی $xy = k$ ، که در آن k ثابت دلخواه دیگری است. لذا، هر هذلولی $xy = k$ یک مسیر قائم خانواده هذلولیهای $x^2 - y^2 = C$ است، و در همین وضع، هر هذلولی $x^2 - y^2 = C$ مسیر قائم خانواده هذلولیهای $xy = k$ می باشد؛ ر. ک. شکل ۱۱.



شکل ۱۱

با استفاده از این روش، مسیرهای قائم خانواده داده شده از منحنیها را بیابید.

۱. خطوط $y = Cx$
۲. سهمیهای $y^2 = Cx$
۳. دوایر $x^2 + y^2 = Cx$
۴. بیضیهای $x^2 + 2y^2 = C$
۵. هذلولیهای $x^2 - 2y^2 = C$
۶. معادله دیفرانسیل خطی $py + q = y'$ را با جانشانی $y = uv$ حل کنید، که در آن u و

معادلات دیفرانسیل مقدماتی ۱۵۷۳

v دو تابع مجهول‌اند، v را طوری بگیرید که ضریب u صفر شود، و سپس از معادله حاصل انتگرال بگیرید.

۷. اغلب می‌توان یک معادله دیفرانسیل را با تعویض نقشهای x و y حل کرد. مثلاً، معادله دیفرانسیل

$$(سد) \quad \frac{dy}{dx} (\ln y - x) = y,$$

که نسبت به y غیرخطی است، نسبت به x خطی است، و این را می‌توان با نوشتن آن به شکل معادل

$$(سد) \quad \frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = \frac{\ln y}{y}$$

دید. جواب عمومی (سه)، و در نتیجه (سه)، را بیابید.

معادله داده شده را با استفاده از روش مسئله قبل حل کنید.

$$(y-x)y' = 1 \quad ۰.۸$$

$$(x-y^2)y' = y \quad ۰.۹$$

$$(e^y + 2x)y' = 1 \quad ۰.۱۰$$

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$(چهار) \quad y'' = f(x, y')$$

را در نظر بگیرید، که در آن طرف راست تابع متغیر مستقل x و مشتق y' است، ولی به تابع مجهول y بستگی ندارد. در این صورت، معادله (چهار) فوراً "به معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$(چهار) \quad p' = f(x, p)$$

نسبت به متغیر جدید

$$p = y'$$

تحویل می‌شود. توجه کنید که معادله اخیر یک معادله دیفرانسیل مانند $y' = p$ از نوع بسیار ساده است. لذا، اگر $p = p(x, C_1)$ جواب عمومی (چهار) به شکل صریح (شامل ثابت دلخواه C_1) باشد، جواب عمومی معادله اصلی (چهار) عبارت است از $y = \int p(x, C_1) dx + C_2$ ، که در آن C_2 ثابت دلخواه دیگر می‌باشد. مثلاً، هرگاه $y'' - y' = x$ ، آنگاه $p' - p = x$ ، و جواب عمومی این معادله خطی نسبت به p مساوی است با $p = -x - 1 + C_1 e^x$. پس نتیجه می‌شود که

$$y = \int p dx = -\frac{1}{2}x^2 - x + C_1 e^x + C_2.$$

معادله دیفرانسیل داده شده را به روش فوق حل نمایید .

$$y'' + y' = 0 \quad . ۱۱$$

$$y'' - y' = e^x \quad . ۱۲$$

$$y'' = \sqrt{1 + y'^2} \quad . ۱۳$$

$$x^2 y'' + x y' = 1 \quad . ۱۴$$

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$y'' = f(y, y') \quad (\text{پنج})$$

را در نظر بگیرید، که در آن طرف راست به تابع مجهول y و مشتقش y' وابسته است و لسی تابع متغیر مستقل x نیست، و مثل مجموعه مسائل قبل قرار دهید $p = y' = dy/dx$ در این صورت،

$$y'' = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} y' = \frac{dp}{dy} p,$$

در نتیجه، (پنج) به معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p) \quad (\text{پنج})$$

تحویل می شود. لذا، اگر $p = p(y, C_1)$ جواب عمومی (پنج) به شکل صریح، شامل ثابت دلخواه C_1 ، باشد، جواب عمومی معادله

$$\frac{dy}{dx} = p(y, C_1)$$

جواب عمومی (پنج) می باشد. مثلاً، هرگاه $yy'' - y'^2 = 0$ ، آنگاه $yp(dp/dy) - p^2 = 0$ یا، پس از تقسیم بر p ، $y dp - p dy = 0$. با ضرب معادله اخیر در عامل انتگرالگیری $1/y^2$ نتیجه می شود که $(y dp - p dy)/y^2 = d(p/y) = 0$. لذا، $p/y = C_1$ یا $dy/dx = p = C_1 y$ ، جواب عمومی معادله اخیر (که جدایی پذیر است)، و در نتیجه معادله اصلی $yy'' - y'^2 = 0$ ، مساوی است با $y = C_2 e^{C_1 x}$. توجه کنید که جواب ثابت $y \equiv 0$ ، که در تقسیم بر p مفقود شد، با قراردادن $C_1 = 0$ به دست می آید.

معادله دیفرانسیل داده شده را به روش فوق حل نمایید .

$$yy'' + y'^2 = 0 \quad . ۱۵$$

$$yy'' - y'^2 = 1 \quad . ۱۶$$

$$y''(1 + y) = y'(1 + y) \quad . ۱۷$$

$$\sqrt{yy''} = y' \quad . ۱۸$$

روش زیر برای حل معادله خطی غیرهمگن مرتبه دوم $y'' + ay' + by = f(x)$ روش تغییر پارامتر نام دارد. فرض کنید $y_1 = y_1(x)$ و $y_2 = y_2(x)$ یک مجموعه اساسی از جوابهای معادله تحویل یافته $y'' + ay' + by = 0$ را تشکیل داده، و $u = u(x)$ و $v = v(x)$ دو تابع مجهول باشند. $y = uy_1 + vy_2$ را در معادله غیرهمگن گذارده، و شرط $u'y_1 + v'y_2 = 0$ را بر مشتقات

u' و v' اعمال می‌کنیم. در این صورت، به آسانی می‌توان تحقیق کرد که
 $(uy_1 + vy_2)' + a(uy_1 + vy_2) + b(uy_1 + vy_2) = f(x)$ به $u'y_1 + v'y_2 = f(x)$ ساده می‌شود.
 نتیجه عبارت است از دستگاه دو معادله

$$\begin{aligned} u'y_1 + v'y_2 &= 0, \\ u'y_1 + v'y_2 &= f(x), \end{aligned} \quad (\text{شش})$$

و می‌توان نشان داد که این دستگاه همواره نسبت به u' و v' قابل حل است. در این صورت،
 با محاسبه انتگرالهای $u = \int u' dx$ و $v = \int v' dx$ (در حالتی که میسر است) توابع u و v به
 دست می‌آیند، و جواب خصوصی نظیر $y = uy_1 + vy_2$ از معادله غیرهمگن را خواهیم داشت.
 مثلاً، هرگاه $y'' - 2y' + y = 2e^x$ ، آنگاه، همانطور که در مثال ۱۰، صفحه ۱۵۵۶، دیدیم،
 $y_1 = e^x$ و $y_2 = xe^x$ یک مجموعه اساسی از جوابهای معادله تحویل یافته $y'' - 2y' + y = 0$
 را تشکیل می‌دهند، و دستگاه (شش) به صورت

$$\begin{aligned} u'e^x + v'xe^x &= 0, \\ u'e^x + v'(e^x + xe^x) &= 2e^x, \end{aligned}$$

با جواب $v' = 2$ ، $u' = -2x$ درمی‌آید. بنابراین، $v = \int 2 dx = 2x$ ، $u = \int -2x dx = -x^2$ ،
 در نتیجه، همانطور که در مثال فوق دیدیم، $y = -x^2e^x + 2x^2e^x = x^2e^x$ یک جواب خصوصی
 معادله غیرهمگن $y'' - 2y' + y = 2e^x$ می‌باشد.

معادله دیفرانسیل داده شده را به روش فوق حل کنید.

$$y'' + y = \sec x \quad ۰۲۰ \qquad y'' + y = \tan x \quad ۰۱۹$$

$$y'' - 2y' + y = e^x/x \quad ۰۲۲ \qquad y'' - y = 2 \sin^2 x \quad ۰۲۱$$

$$y'' + 3y' + 2y = \cos(e^x) \quad ۰۲۴ \qquad y'' - 2y' + y = e^x \ln x \quad ۰۲۳$$

معادله خطی همگن $y'' + ay' + by = 0$ با مجموعه اساسی داده شده از جوابها رابیاید.

$$e^{-10x}, xe^{-10x} \quad ۰۲۶ \qquad e^{-4x} \cos 5x, e^{-4x} \sin 5x \quad ۰۲۵$$

$$e^{-99x}, e^{100x} \quad ۰۲۸ \qquad e^{3x}, \sinh 3x \quad ۰۲۷$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول داده شده، شامل دو تابع مجهول $x = x(t)$ و $y = y(t)$
 از متغیر مستقل t ، را حل کنید. (ابتدا، با حذف تابع y ، یک معادله دیفرانسیل مرتبه
 دوم نسبت به x بیابید.)

$$\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -x \quad ۰۲۹$$

$$\frac{dx}{dt} = x + y, \frac{dy}{dt} = x - y \quad ۰۳۰$$

$$\frac{dx}{dt} = x + y, \frac{dy}{dt} = t + x + y \quad \cdot ۳۱$$

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y, \frac{dy}{dt} = x + 2y \quad \cdot ۳۲$$

۳۳. یک جسم استوانه‌ای روی یک دریاچه شناور است. فرض کنید جسم را کمی به پایین فشار داده و سپس به آرامی رها کنیم. نشان دهید که جسم حرکت توافقی ساده در راستای قائم می‌یابد (از نیروهای مقاومت صرف‌نظر می‌شود). دوره تناوب T نوسانات را در صورتی بیابید که جسم در حال تعادل $2ft$ در آب فرورفته باشد.

۳۴. فرض کنید E انرژی کل یک نوسانگر توافقی میرا باشد. نشان دهید که E به میزان hn^2 کاهش می‌یابد، که در آن r سرعت نوسانگر بوده و h ضریب میرایی آن می‌باشد. یک معادله دیفرانسیل را اغلب می‌توان با گرفتن جوابی از آن به صورت سری توانی همگرای

$$y = y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (\text{هفت})$$

حل کرد. مثلاً، معادله دیفرانسیل $y' = 2xy' + 4y$ را در نظر بگیرید. با دوبار مشتق‌گیری از (هفت)، به کمک قضیه ۱۴، صفحه ۸۶۸، سریهای توانی

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \quad (\text{هفت})$$

را به دست می‌آوریم که همان شعاع همگرایی (هفت) را دارد. با گذاردن (هفت) و (هفت) در $y'' = 2xy' + 4y$ ، نتیجه می‌شود که

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

یا معادلاً

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

بروز آید این معادله بخواند اتحاد باشد، آنگاه توانهای یکسان x باید ضرایب یکسان داشته باشند (مثال ۴، صفحه ۸۷۵، را به یاد آورید). بنابراین، $2a_2 = 4a_0$ یا $a_2 = 2a_0$ ، و

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} = (2n+4) a_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

بنابراین، ضرایب سری (هفت) در فرمول بازگشتی

$$a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{هشت})$$

معادلات دیفرانسیل مقدماتی ۱۵۲۲

صدق می‌کنند. به ضرایب a_0 و a_1 می‌توان مقادیر دلخواه داد، ولی به محض انتخاب این ضرایب، سایر ضرایب a_2, a_3, \dots از فرمول (هشت) به دست می‌آیند. در واقع، به آسانی معلوم می‌شود که از (هشت) داریم

$$a_{2k} = \frac{2^k}{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1} a_0, \quad a_{2k+1} = \frac{1}{k!} a_1$$

$$(k = 1, 2, \dots).$$

با گذاردن این مقادیر از ضرایب در (هفت)، بالاخره معلوم می‌شود که جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' = 2xy' + 4y$ مساوی است با $y = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$ ، که در آن توابع $y_0 = y_0(x)$ و $y_1 = y_1(x)$ دارای بسط‌های سری توانی

$$y_0 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^{2k}}{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}, \quad y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{k!}$$

می‌باشند. از آزمون نسبت نتیجه می‌شود که این دوسری به ازای هر x همگراست (درواقع، فوراً " معلوم می‌شود که y_1 تابع xe^{x^2} است).

معادله دیفرانسیل داده شده را به روش فوق حل کنید.

$$y'' + xy' + y = 0 \quad \cdot ۳۶$$

$$y'' = 2xy' - 4y \quad \cdot ۳۵$$

$$y'' = x^2 y \quad \cdot ۳۸$$

$$y'' = xy \quad \cdot ۳۷$$

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir



درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

www.riazisara.ir

سایت ویژه ریاضیات